Системы рациональных, иррациональных, показательных неравенств

1. C 3 № 484598. Решите систему неравенств $\begin{cases} 6^x + \left(\dfrac{1}{6}\right)^x > 2, \\ 2^{x^2} \le 4 \cdot 2^x. \end{cases}$

Решение.
Последовательно получаем:

$$\begin{cases} 6^x + \dfrac{1}{6^x} > 2, \\ 2^{x^2} \le 4 \cdot 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^{2x} + 1 > 2 \cdot 6^x, \\ 2^{x^2} \le 2^{x+2} \end{cases} \underset{2>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (6^x - 1)^2 > 0, \\ x^2 \le x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x \ne 1, \\ x^2 - x - 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0, \\ -1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Ответ: $[-1;\ 0) \cup (0;\ 2]$.

2. C 3 № 484599. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5^x + \left(\dfrac{1}{5}\right)^x > 2, \\ 2^{x^2} \le 64 \cdot 2^x. \end{cases}$

Решение.
Последовательно получаем:

$$\begin{cases} 5^x + \dfrac{1}{5^x} > 2, \\ 2^{x^2} \le 64 \cdot 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{2x} + 1 > 2 \cdot 5^x, \\ 2^{x^2} \le 2^{x+6} \end{cases} \underset{2>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (5^x - 1)^2 > 0, \\ x^2 \le x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x \ne 1, \\ x^2 - x - 6 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0, \\ -2 \le x \le 3. \end{cases}$$

Ответ: $[-2, 0) \cup (0,\ 3]$.

3. C 3 № 485936. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{2x - 1} \le 1, \\ 25x^2 - 3\,|3 - \ 5x| < 30x - 9. \end{cases}$

Решение.
Преобразуем первое неравенство:

$$\frac{2x^2 - 2x + 1 - 2x + 1}{2x - 1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2x - 1} \le 0.$$

Решения неравенства: $x = 1$ или $x < \dfrac{1}{2}$.

Преобразуем второе неравенство:

$$25x^2 - 30x + 9 - 3|3 - 5x| < 0 \Leftrightarrow (5x - 3)^2 - 3|3 \ - \ 5x| < 0.$$

Сделав замену $t = |3 - 5x|$, получаем неравенство $t^2 - 3t < 0$, откуда $0 < t < 3$,

Тогда: $0 < |5x - 3| < 3$, откуда $0 < x < \dfrac{3}{5}$ или $\dfrac{3}{5} < x < \dfrac{6}{5}$.

Решение системы неравенств: $0 < x < \dfrac{1}{2}$ или $x = 1$.

Ответ: $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \cup \{1\}$.

4. C 3 № 485944. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2 - 6x + 5}{2x - 3} \le 1, \\ 25x^2 - 4\,|8 - \ 5x| < 80x - 64. \end{cases}$$

Решение.
Решим первое неравенство системы:

$$\frac{2x^2-6x+5-2x+3}{2x-3}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{2x-3}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{2x-3}\le 0.$$

Решения: $x=2$ или $x<\frac{3}{2}$.

Решим второе неравенство системы:

$$25x^2-80x+64-4|8-5x|<0 \Leftrightarrow (5x-8)^2-4|8-5x|<0.$$

Сделаем замену $y=|8-5x|$. Тогда $y^2-4y<0 \Leftrightarrow 0<y<4$.

Вернемся к исходной переменной:

$$0<|8-5x|<4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<8-5x<4; \\ -4<8-5x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{4}{5}<x<\frac{8}{5}; \\ \frac{8}{5}<x<\frac{12}{5}. \end{array}\right.$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-6x+1}{2x-1}\le 1; \\ 25x^2-4\,|8-\ 5x|<80x-64 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{4}{5}<x<\frac{3}{2}; \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{2}\right)\cup\{2\}$.

5. C 3 № 485956. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x+5}{4+x}-\dfrac{1}{x^2+9x+20}\right)\sqrt{-7x-x^2}\ge 0, \\ x\sqrt{8}-7x+14\sqrt{8}>57. \end{cases}$$

Решение.
Решим первое неравенство.

$$\frac{(x+5)^2-1}{(x+5)(x+4)}\sqrt{-x(x+7)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+6)(x+4)\sqrt{-x(x+7)}}{(x+5)(x+4)}\geq 0.$$

В случае, когда $-x(x+7)=0$, то есть при $x=0$, $x=-7$ — неравенство обращается в равенство.
Если $-x(x+7)>0$, решаем неравенство

$$\frac{(x+6)(x+4)}{(x+4)(x+5)}\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,\,-6]\cup(-5,\,-4)\cup(-4,\,+\infty).$$

С учетом ограничений решением первого неравенства системы является: $x\in[-7,\,-6]\cup(-5,\,-4)\cup(-4,\,0]$.
Решим второе неравенство системы:

$$x\sqrt{8}-7x+14\sqrt{8}>57 \Leftrightarrow (\sqrt{8}-7)x+14\sqrt{8}-57>0.$$

Заметим, что $\sqrt{8}-7<0$, тогда

$$x<\frac{57-14\sqrt{8}}{\sqrt{8}-7}=\frac{8-14\sqrt{8}+49}{\sqrt{8}-7}=\frac{(\sqrt{8}-7)^2}{\sqrt{8}-7}=\sqrt{8}-7.$$

Решением второго неравенства системы является: $x<\sqrt{8}-7$.
Учитывая, что $-5<\sqrt{8}-7<-4$, получаем решение системы неравенств.

Ответ: $x\in[-7,\,-6]\cup(-5,\,\sqrt{8}-7)$.

6. C 3 № 500589. Решите систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2}\leq\dfrac{(3x+1)^2}{4},\\ \dfrac{x^3+37}{(x+4)^3}\geq 1+\dfrac{1}{(x+4)^2}.\end{cases}$

Решение.
Решим первое неравенство:

$$\frac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2}\leq\frac{(3x+1)^2}{4}\Leftrightarrow 2(x-1)^2+8(x+1)^2\leq(3x+1)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-4x+2+8x^2+16x+8\leq 9x^2+6x+1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+6x+9\leq 0\Leftrightarrow (x+3)^2\leq 0\Leftrightarrow x=-3.$$

Проверим, удовлетворяет ли число -3 второму неравенству:

$$\frac{-27+37}{1}\geq 1+\frac{1}{(-3+4)^2}\Leftrightarrow 10\geq 2,$$

что верно. Следовательно, число -3 удовлетворяет второму неравенству.

Ответ: -3

7. C 3 № 500640. Решите систему $\begin{cases}2^x+6\cdot 2^{-x}\leq 7,\\ \dfrac{2x^2-4x}{x-4}\leq 0.\end{cases}$

Решение.
Произведем эквивалентные преобразования системы

$$\begin{cases}2^x+6\cdot 2^{-x}\leq 7,\\ \dfrac{2x^2-4x}{x-4}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4^x-7\cdot 2^x+6\leq 0,\\ \dfrac{x^2-2x}{x-4}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2^x-1)(2^x-6)\leq 0,\\ \dfrac{x(x-2)}{x-4}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq x\leq\log_2 6,\\ \left[\begin{array}{l}x\leq 0,\\ 2\leq x<4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ 2\leq x\leq\log_2 6.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{0\}\cup[2,\log_2 6]$.

8. C 3 № 500641. Решите систему

$$\begin{cases} 3^x + 10 \cdot 3^{-x} \le 11, \\ \dfrac{2x^2 - 5x}{x-3} \le x. \end{cases}$$

Решение.
Имеем:

$$\begin{cases} 3^x + 10 \cdot 3^{-x} \le 11, \\ \dfrac{2x^2 - 5x}{x-3} \le x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x - 11 \cdot 3^x + 10 \le 0, \\ \dfrac{x^2 - 2x}{x-3} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3^x - 1)(3^x - 10) \le 0, \\ \dfrac{x(x-2)}{x-3} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \log_3 10, \\ \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ 2 \le x < 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 2 \le x \le \log_3 10. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0\} \cup [2; \log_3 10]$.

9. C 3 № 500899. Решите систему $\begin{cases} 2^x + 6 \cdot 2^{-x} \le 7, \\ \dfrac{2x^2 - 6x}{x-4} \le x. \end{cases}$

Решение.
Решим первое неравенство. Сделаем замену $2^x = y$. Поскольку $y > 0$, на него можно умножить обе части неравенства. Получим

$$y + \frac{6}{y} \le 7 \Leftrightarrow y^2 - 7y + 6 \le 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-6) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le y \le 6,$$

откуда $0 \le x \le \log_2 6$.
Решим второе неравенство:

$$\frac{2x^2 - 6x}{x-4} \le \frac{x^2 - 4x}{x-4} \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{x-4} \le 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, 4).$$

Учитывая, что $2 < \log_2 6 < 3$, находим решение системы.
Ответ: $\{0\} \cup [2, \log_2 6]$.

Решение.

Решим первое неравенство. Сделаем замену $z=0,5x\sqrt{5}$, получаем:

$$\frac{2}{z-1}+\frac{z-2}{z-3}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{(z-2)(z-5)}{(z-1)(z-3)}\leq 0;\ 1<z\leq 2 \text{ или } 3<z\leq 5.$$

Обратная замена дает $\frac{2}{\sqrt{5}}<x\leq\frac{4}{\sqrt{5}}$ или $\frac{6}{\sqrt{5}}<x\leq 2\sqrt{5}$.

Решим второй неравенство. Сделаем замену $t=\frac{x-4}{2}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t}+t\right)^2\leq\frac{25}{4};\ 0,5\leq|t|\leq 2.$$

Обратная замена дает: $0\leq x\leq 3$ или $5\leq x\leq 8$.

Учитывая, что $0<\frac{2}{\sqrt{5}}<\frac{4}{\sqrt{5}}<\frac{6}{\sqrt{5}}<3<2\sqrt{5}<5$, получаем решение системы:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}<x\leq\frac{4}{\sqrt{5}} \text{ или } \frac{6}{\sqrt{5}}<x\leq 3$$

Ответ: $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right],\left(\frac{6}{\sqrt{5}};3\right]$.

11. C 3 № 500963. Решите систему неравенств: $\begin{cases}\frac{2}{5^x-1}+\frac{5^x-2}{5^x-3}\geq 2,\\ \left(\frac{2}{25x^2-10x-8}+\frac{25x^2-10x-8}{2}\right)^2\geq 4.\end{cases}$

Решение.

Реши первое неравенство. Сделаем замену $z=5^x$, получаем

$$\frac{2}{z-1}+\frac{z-2}{z-3}\geq 2\Leftrightarrow\frac{(z-2)(z-5)}{(z-1)(z-3)}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<z\leq 2,\\3<z\leq 5.\end{array}\right.$$

Обратная замена дает $0<x\leq\log_5 2$ или $\log_5 3<x\leq 1$.

Решим второе неравенство. Сделав замену $t=\frac{25x^2-10x-8}{2}$, получаем

$$\left(\frac{1}{t}+t\right)^2\geq 4\Leftrightarrow\left(\frac{1}{t}-t\right)^2\geq 0\Leftrightarrow t\neq 0.$$

Значит, $x\neq-\frac{2}{5}$, $x\neq\frac{4}{5}$, причем $-\frac{2}{5}<0$, а $\log_5 3<\frac{4}{5}<1$.

Таким образом, получаем решение системы.

Ответ: $x\in(0,\log_5 2]\cup\left(\log_5 3,\frac{4}{5}\right)\cup\left(\frac{4}{5},1\right]$.

12. C 3 № 500969. Решите систему неравенств: $\begin{cases}\frac{3}{2-(x+1)\sqrt{3}}+\frac{(x+1)\sqrt{3}-1}{(x+1)\sqrt{3}-3}\geq 3,\\ (10x+7)(4-5x)\left(50x^2-5x-28\right)<0.\end{cases}$

503 Service Temporarily Unavailable

Решение.

Решим первое неравенство. Сделаем замену $z=(x+1)\sqrt{3}$, получаем

$$\frac{3}{2-z}+\frac{z-1}{z-3}\geq 3;\ \frac{(z-1)(z-3,5)}{(z-2)(z-3)}\leq 0; 1\leq z<2 \text{ или } 3<z\leq 3,5.$$

Обратная замена дает $\frac{1}{\sqrt{3}}-1\leq x<\frac{2}{\sqrt{3}}-1$ или $\sqrt{3}-1<x\leq\frac{7}{2\sqrt{3}}-1.$

Решим второе неравенство. Заметим, что

$$(10x+7)(4-5x)(50x^2-5x-28)=-(10x+7)^2(4-5x)^2,$$

поэтому неравенство $-(10x+7)^2(4-5x)^2<0$ выполнено при всех x, кроме всех $x=-0,7$ и $x=0,8$, причем

$$-0,7<\frac{1}{\sqrt{3}}<-1 \text{ и } \sqrt{3}-1<0,8<\frac{7}{2\sqrt{3}}-1.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}-1\leq x<\frac{2}{\sqrt{3}}-1;\quad \sqrt{3}-1<x<0,8;\quad 0,8<x\leq\frac{7}{2\sqrt{3}}-1.$$

Ответ:$[\frac{1}{\sqrt{3}}-1;\frac{2}{\sqrt{3}}-1),(\sqrt{3}-1;0,8),(0,8;\frac{7}{2\sqrt{3}}-1]$

13. C 3 № 501074. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{(x+1)^2+4(x-1)^2}{2}\leq\dfrac{(3x-1)^2}{4},\\ \dfrac{x^3-17}{(x-4)^3}\leq 1+\dfrac{1}{(x-4)^2}.\end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство системы.

$$2(x+1)^2+8(x-1)^2-(3x-1)^2\leq 0\Leftrightarrow 2x^2+4x+2+8x^2-16x+8-9x^2+6x-1\leq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+9\leq 0\Leftrightarrow (x-3)^2\leq 0\Leftrightarrow x=3.$$

Второе неравенство системы можно не решать. Подставляя $x=3$ во второе неравенство, получаем: $-10\leq 2$ — верное числовое неравенство.

Ответ: 3.

14. C 3 № 501437. Решите систему неравенств $\begin{cases}|x+2|-x|x|\leq 0,\\ (x^2-x-6)\cdot\sqrt{8-x}\leq 0.\end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство $|x+2|-x|x|\leq 0$, При любом $x\leq 0$ неравенство $|x+2|-x|x|\leq 0$ не вы полняется. При $x>0$ неравенство равносильно неравенству $x^2-x-2\geq 0$, решением которого с учетом условия $x>0$ является луч $x\geq 2$.

Число 8 — решение второго неравенства, и при $x>8$ решений нет.

Пусть $x<8$. Тогда $\sqrt{8-x}>0$, и второе неравенство равносильно неравенству $x^2-x-6\leq 0$. Решим систему:

$$\begin{cases} x<8, \\ x^2-x-6\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<8, \\ -2\leq x\leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2\leq x\leq 3.$$

Таким образом решением второго неравенства является отрезок $-2\leq x\leq 3$ и точка $x=8$.

Следовательно, решением данной системы являются отрезок $2\leq x\leq 3$. и точка $x=8$.

Ответ: $[2;3]$, 8.

15. C 3 № 501457. Решите систему неравенств $\begin{cases} (x-3)|x-3|-|x-1|\geq 0, \\ (x^2-7x+6)\cdot\sqrt{11-x}\leq 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство $(x-3)|x-3|-|x-1|\geq 0$. При любом $x\leq 3$ неравенство не выполняется поскольку левая часть отрицательна. При $x>3$ неравенство равносильно неравенству $x^2-7x+10\geq 0$, решением которого с учётом условия $x>3$ является луч $x\geq 5$.

Число 11 — решение второго неравенства, и при $x>11$ решений нет.

Пусть $x<11$. Тогда $\sqrt{11-x}>0$, и второе неравенство равносильно неравенству $x^2-7x+6\leq 0$.

Решим систему: $\begin{cases} x<11, \\ x^2-7x+6\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<11, \\ 1\leq x\leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leq x\leq 6.$

Таким образом, решением второго неравенства являются отрезок $1\leq x\leq 6$ и точка $x=11$.

Следовательно, решением данной системы являются отрезок $5\leq x\leq 6$. и точка $x=11$.

Ответ: $[5,6]\cup\{11\}$.

16. C 3 № 501550. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}\leq 0, \\ \dfrac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{x}\geq 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le \sqrt{10}.$$

Решим второе неравенство:

$$\frac{3^{|x^2-2x-1|}-3^2}{x}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{|x^2-2x-1|-2}{x}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-2x-1)^2-4}{x}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)}{x}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)(x-1)^2}{x}\ge 0.$$

Методом интервалов найдем решения: $-1\le x<0,\quad x\ge 3$ или $x=1$.

Поскольку $3<\sqrt{10}$, получаем решение системы.

Ответ: $[-1,0)\cup\{1\}\cup[3;\sqrt{10}]$.

Примечание: В решении второго неравенства использованы следующие эквивалентные переходы:

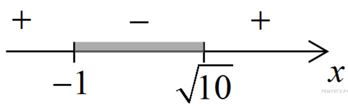
1. $3^a-3^b\ge 0 \Leftrightarrow 3^a\ge 3^b \Leftrightarrow a\ge b \Leftrightarrow a-b\ge 0.$

2. При $a>0$, $|t|-a\ge 0 \Leftrightarrow |t|\ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge a, \\ t\le -a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-a\ge 0, \\ t+a\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (t-a)(t+a)\ge 0 \Leftrightarrow t^2-a^2\ge 0.$

Приведём другое решение.

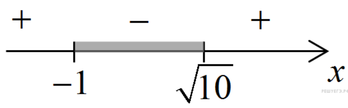
$$\text{а) } x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}\le 0 \;\Leftrightarrow\; x^2-(\sqrt{10}+(-1))x+\sqrt{10}(-1)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\; (x-\sqrt{10})(x+1)\le 0 \;\Leftrightarrow\; -1\le x\le \sqrt{10}.$$



$$\text{б) } \frac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{x}\ge 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3^{|x^2-2x-1|}-3^2}{x}\ge 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(3-1)(|x^2-2x-1|-2)}{x}\ge 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{|x^2-2x-1|^2-2^2}{x}\ge 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)}{x}\ge 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow\; \frac{(x+1)(x-3)(x-1)^2}{x}\ge 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} -1\le x<0, \\ x=1, \\ x\ge 0. \end{array}\right.$$

в) Вернёмся к системе $\left\{\begin{array}{l} -1\le x\le \sqrt{10}, \\ \left[\begin{array}{l} -1\le x<0, \\ x=1, \\ x\ge 0. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le x<0, \\ x=1, \\ 3\le x\le \sqrt{10}, \end{array}\right.$ т. к. $\sqrt{10}>3$.

Ответ: $[-1,0)\cup\{1\}\cup[3;\sqrt{10}]$.

17. C 3 № 501556. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2+(2-\sqrt{15})x-2\sqrt{15}\le 0, \\ \dfrac{0,2^{|x^2-4x+2|}-0,04}{3-x}\le 0. \end{cases}$

Решение.

Рассмотрим уравнение $x^2+(2-\sqrt{15})x-2\sqrt{15}=0$. По теореме, обратной теореме Виета, сумма его корней равна $-2+\sqrt{15}$, а их произведение равно $-2\sqrt{15}$. Поэтому это числа -2 и $\sqrt{15}$. Тогда для первого неравенства системы имеем:

$$x^2+(2-\sqrt{15})x-2\sqrt{15}\le 0 \Leftrightarrow -2\le x\le\sqrt{15}.$$

Для решения второго неравенства используем следующие теоремы о знаках: при положительных a выражения (a^b-a^c) и $(a-1)(b-c)$ имеют одинаковые знаки; для любых для a,b выражения $|a|-|b|$ и a^2-b^2 имеют одинаковые знаки.

Тогда имеем:

$$\frac{0,2^{|x^2-4x+2|}-0,2^2}{3-x}\le 0 \Leftrightarrow \frac{|x^2-4x+2|-2}{3-x}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-4x+2)^2-4}{3-x}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-4x)(x^2-4x+4)}{3-x}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-4)(x-2)^2}{3-x}\ge 0.$$

Методом интервалов найдем решения: $x\le 0,\quad 3<x\le 4$ или $x=2$.

Поскольку $\sqrt{15}<4$, получаем решение системы.

Ответ: $[-2,\,0]\cup\{2\}\cup(3,\,\sqrt{15}]$.

18. C 3 № 502024. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^{2x-1}-7\cdot 2^{x-1}+5\le 0, \\ \dfrac{x^2-2x-2}{x^2-2x}+\dfrac{7x-19}{x-3}\le\dfrac{8x+1}{x}. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$2^{2x-1}-7\cdot 2^{x-1}+5\le 0 \Leftrightarrow 2^{2x}-7\cdot 2^{x}+10\le 10.$$

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2-7t+10\le 0$, откуда

$$t\le 2^x\le 5 \Leftrightarrow 2\le 2^x\le 5 \Leftrightarrow 1\le x\le \log_2 5.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $1\le x\le \log_2 5$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^2-2x-2}{x^2-2x}+\frac{7x-19}{x-3}\le\frac{8x+1}{x}\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x^2-2x}+7+\frac{2}{x-3}-8-\frac{1}{x}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x^2-2x}+\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x}\le 0\Leftrightarrow -\frac{2}{x(x-2)}+\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x}\le 0\Leftrightarrow\frac{x(x-1)}{x(x-3)(x-2)}\le 0,$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x<0;\ 0<x\le 1;\ 2<x<3$.

3. Поскольку $2<\log_2 5<3$, получаем решение исходной системы неравенств: $x=1;\ 2<x\le\log_2 5$.

Ответ: $1;\ (2;\ \log_2 5]$.

19. С 3 № 502116. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^x-7\cdot 2^x+10\le 0, \\ \dfrac{x^3-3x^2+3x-3}{x^2-3x}\le x+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $4^x-7\cdot 2^x+10\le 0$. Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2-7t+10\le 0$, откуда

$$2\le t\le 5\Leftrightarrow 2\le 2^x\le 5\Leftrightarrow 1\le x\le\log_2 5.$$

Решение первого неравенства системы $1\le x\le\log_2 5$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^3-3x^2+3x-3}{x^2-3x}\le x+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x(x^2-3x)}{x^2-3x}+\frac{x-3}{x(x-3)}+\frac{2x}{x(x-3)}\le x+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\le 0,\text{ где } x\ne 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x<0\Leftrightarrow 0<x\le 1\Leftrightarrow 2<x<3$.

3. Поскольку $2<\log_2 5<3$, получаем решение исходной системы неравенств: $x=1; 2<\log_2 5<3$

Ответ: 1; (2; $\log_2 5$].

20. С 3 № 502295. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3|x+1|+\dfrac{1}{2}|x-2|-\dfrac{3}{2}x\le 8, \\ x^3+6x^2+\dfrac{28x^2+2x-10}{x-5}\le 2. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Раскрывая модули, получаем три случая.

Первый случай.

$$\begin{cases} -3x-3-\dfrac{1}{2}x+1-\dfrac{3}{2}x\le 8, \\ x\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x\le 10, \\ x\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow\ -2\le x\le -1.$$

Второй случай.

$$\begin{cases} 3x+3-\dfrac{1}{2}x+1-\dfrac{3}{2}x\le 8, \\ -1<x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 4, \\ -1<x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow\ -1<x\le 2.$$

Третий случай.

$$\begin{cases} 3x+3+\dfrac{1}{2}x-1-\dfrac{3}{2}x\le 8, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\le 6, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow\ 2<x\le 3.$$

Объединяя промежутки, получаем $x\in[-2,3]$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+6x^2+\frac{28x^2+2x-10}{x-5}\le 2 \Leftrightarrow x^3+6x^2+\frac{28x^2}{x-5}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^4+x^3-2x^2}{x-5}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)(x+2)}{x-5}\le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\in(-\infty,-2]\cup\{0\}\cup[1,5)$.

3. Пересекая промежутки получаем решение исходной системы неравенств.

Ответ: $\{-2,0\}\cup[1,3]$.

21. C 3 № 503322. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^x+5\cdot 2^{2-x}\le 12, \\ \dfrac{x^2-5x-6}{x^2-1}\le\dfrac{x-9}{x-1}+\dfrac{2}{x-3}. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $2^x+5\cdot 2^{2-x}\le 12 \Leftrightarrow 2^{2x}-12\cdot 2^x+20\le 0$.

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t^2-12t+20\le 0 \Leftrightarrow 2\le t\le 10 \Leftrightarrow 2\le 2^x\le 10 \Leftrightarrow 1\le x\le \log_2 10.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $x\in[1,\log_2 10]$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^2-5x-6}{x^2-1}\le\frac{x-9}{x-1}+\frac{2}{x-3} \Leftrightarrow \frac{(x-6)(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{x-9}{x-1}\le\frac{2}{x-3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-3}\le 0, x\ne -1 \Leftrightarrow \frac{x-7}{(x-1)(x-3)}\le 0, x\ne -1.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(3,7]$.

3. Поскольку $3<\log_2 10<7$, получаем решение исходной системы неравенств.

Ответ: $(3,\log_2 10]$.

22. C 3 № 503362. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^x+80\cdot 2^{4-x}\le 261, \\ \dfrac{x^2-16x+39}{x^2-12x+27}\le\dfrac{x-18}{x-9}+\dfrac{4}{x-8}. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$2^x+80\cdot2^{4-x}\le261;\ 2^{2x}-261\cdot2^x+1280\le0.$$

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2-261t+1280\le0$, откуда

$$5\le t\le256\Leftrightarrow5\le2^x\le256\Leftrightarrow\log_2 5\le x\le8.$$

Решение первого неравенства исходной системы $\log_2 5\le x\le8$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^2-16x+39}{x^2-12x+27}\le\frac{x-18}{x-9}+\frac{4}{x-8}\Leftrightarrow\frac{(x-3)(x-13)}{(x-9)(x-3)}-\frac{x-18}{x-9}\le\frac{4}{x-8}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{5}{x-9}-\frac{4}{x-8}\le0,\text{ где } x\ne3;\ \frac{x-4}{(x-8)(x-9)}\le0,\text{ где } x\ne3.$$

Решение второго неравенства системы: $x<3;\ 3<x\le4;\ 8<x<9.$

3. Поскольку $\log_2 5<3$, получаем решение исходной системы неравенств: $\log_2 5\le x<3;\ 3<x\le4.$

Ответ: $[\log_2 5;\ 3);\ (3;\ 4].$

23. C 3 № 504417. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}3x-|x+8|-|1-x|\le-6,\\ x^2-x+3-\dfrac{x^3+4x^2-3x-1}{x}\le2.\end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство.

$$|x+8|+|1-x|\ge3x+6.$$

Неравенство заведомо выполняется, если правая часть отрицательнв, то есть, если $x<-2$

Если $x\ge-2$, то

$$x+8+|x-1|\ge3x+6\Leftrightarrow|x-1|\ge2(x-1)$$

Это верно только тогда, когда $x-1\le0$.

Решение первого неравенства $x\le1$

Решим второе неравенство:

$$\frac{x(x^2-x+3)}{x}-\frac{x^3+4x^2-3x-1}{x}\le\frac{2x}{x}\Leftrightarrow\frac{-5x^2+4x+1}{x}\le0\Leftrightarrow\frac{(5x+1)(x-1)}{x}\ge0$$

Получаем $-\dfrac{1}{5}\le x<0$ или $x\ge1$

Решением системы является общая часть решений обоих неравенств:

$$-\frac{1}{5}\le x<0\text{ или } x=1$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{5};0\right)\cup1.$

24. C 3 № 504438. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 3|x+3|-3x \le 14-|2-x|, \\ x^2-3x+1-\dfrac{x^3+x^2+3x-21}{x} \ge 3. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство.

$$3|x+3|+|2-x| \le 3x+14 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-14 \le 3(x+3)+(2-x) \le 3x+14, \\ -3x-14 \le 3(x+3)-(2-x) \le 3x+14. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-14 \le 2x+11 \le 3x+14, \\ -3x-14 \le 4x+7 \le 3x+14. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -5, \\ x \ge -3,. \\ x \le 7 \end{cases}$$

Решение первого неравенства $-3 \le x \le 7$

Решим второе неравенство:

$$\frac{x(x^2-3x+1)}{x} - \frac{x^3+x^2+3x-21}{x} \ge \frac{3x}{x} \Leftrightarrow \frac{-4x^2-5x+21}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(4x-7)}{x} \le 0$$

Получаем $x \le -3$ или $0 < x \le \dfrac{7}{4}$

Решением системы является общая часть решений обоих неравенств:

$$x = -3 \text{ или } 0 < x \le \frac{7}{4}$$

Ответ:$-3 \cup \left(0; \dfrac{7}{4}\right]$.

25. C 3 № 485974. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{6}{x+3} \ge 0, \\ \sqrt{x^2+22} \le 5. \end{cases}$

Решение.

1.Решим первое неравенство

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}-\frac{6}{x+3} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+5x+6+2(x^2+4x+3)-6(x^2+3x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+5x}{(x+1)(x+2)(x+3)} \le 0.$$

Получаем: $x \in (-\infty, -3) \cup \left(-2, -\dfrac{5}{3}\right] \cup (-1, 0]$.

2. Решим второе неравенство:

$$0 < x^2+22 \le 25 \Leftrightarrow x^2 \le 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}.$$

3. Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Поскольку $-2 < -\sqrt{3} < -\dfrac{5}{3}$, получаем.

Ответ: $x \in \left[-\sqrt{3}, -\dfrac{5}{3}\right] \cup (-1, 0]$.

26. C 3 № 485969. Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{6}{x-3}\geq 0 \\ \sqrt{x^2+34}\geq 6. \end{cases}$$

Решение.
Решим первое неравенство

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}-\frac{6}{x-3}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6+2(x^2-4x+3)-6(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 0, \\ 1<x\leq \dfrac{5}{3}, \\ 2<x<3. \end{array}\right.$$

2. Решим второе неравенство:

$$x^2+34\geq 36 \Leftrightarrow x^2\geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -\sqrt{2}, \\ x\geq \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

3. Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Поскольку $1<\sqrt{2}<\dfrac{5}{3}$, получаем.

Ответ: $x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup\left[\sqrt{2},\dfrac{5}{3}\right]\cup(2,3)$.