

**К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ
ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ**

**ЕДИНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**



ЭКЗАМЕН

Под редакцией И. В. Ященко

СОЗДАНО РАЗРАБОТЧИКАМИ ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ

2015

**ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ
ЗАДАНИЯ**

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

10 вариантов заданий

Ответы и решения

Критерии оценок

Бланки ответов

***Издательство
«ЭКЗАМЕН»***

**МОСКВА
2015**

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Е33

Е33 **ЕГЭ 2015. Математика. Типовые тестовые задания / И. Р. Высоцкий, П. И. Захаров, В. С. Панферов, С. Е. Посицельский, А. В. Семенов, М. А. Семенова, И. Н. Сергеев, В. А. Смирнов, С. А. Шестаков, Д. Э. Шноль, И. В. Ященко; под ред. И. В. Ященко.** — М. : Издательство «Экзамен», 2015. — 56 с. (Серия «ЕГЭ. ОФЦ. Типовые тестовые задания»)

ISBN 978-5-377-08669-7

Типовые тестовые задания по математике содержат 10 вариантов комплектов заданий, составленных с учётом всех особенностей и требований Единого государственного экзамена в 2015 году. Назначение пособия — предоставить читателям информацию о структуре и содержании контрольных измерительных материалов 2015 г. по математике, степени трудности заданий.

В состав авторского коллектива входят специалисты, имеющие большой опыт работы в школе и вузе и принимающие участие в разработке тестовых заданий для ЕГЭ.

В сборнике даны ответы на все варианты тестов и приводятся решения всех заданий одного из вариантов. Кроме того, приведены образцы бланков, используемых на ЕГЭ для записи ответов и решений.

Пособие может быть использовано учителями для подготовки учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ, а также старшеклассниками и абитуриентами — для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Справочное издание

**Высоцкий И. Р., Захаров П. И., Панферов В. С., Посицельский С. Е.,
Семенов А. В., Семенова М. А., Сергеев И. Н., Смирнов В. А.,
Шестаков С. А., Шноль Д. Э., Ященко И. В.**

ЕГЭ. МАТЕМАТИКА ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Издательство «**ЭКЗАМЕН**»

Гигиенический сертификат № РОСС RU. АЕ51. Н 16582 от 08.04.2014 г.

Главный редактор *Л. Д. Лапто*. Редактор *И. М. Бокова*. Технический редактор *Л. В. Павлова*.
Корректор *Л. К. Корнилова*. Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*. Компьютерная верстка *Е. Ю. Лысова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.. www.examen.biz

E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz; по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Формат 60×90/8. Гарнитура «Школьная». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 2,63.

Усл. печ. л. 7. Тираж 50 000 экз. Заказ 2974.

Общероссийский классификатор продукции

ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами

в ООО «Красногорская типография»

143405, Московская обл., г. Красногорск, Коммунальный кв-л, д. 2. www.ktprint.ru

ISBN 978-5-377-08669-7

© Высоцкий И. Р., Захаров П. И., Панферов В. С.,
Посицельский С. Е., Семенов А. В., Семенова М. А.,
Сергеев И. Н., Смирнов В. А., Шестаков С. А.,
Шноль Д. Э., Ященко И. В., 2015
© Издательство «**ЭКЗАМЕН**», 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Инструкция по выполнению работы	4
Вариант 1	5
Часть 1	5
Часть 2	7
Вариант 2	9
Часть 1	9
Часть 2	11
Вариант 3	13
Часть 1	13
Часть 2	15
Вариант 4	17
Часть 1	17
Часть 2	19
Вариант 5	21
Часть 1	21
Часть 2	23
Вариант 6	25
Часть 1	25
Часть 2	27
Вариант 7	29
Часть 1	29
Часть 2	31
Вариант 8	33
Часть 1	33
Часть 2	35
Вариант 9	37
Часть 1	37
Часть 2	39
Вариант 10	41
Часть 1	41
Часть 2	43
Ответы	45
Вариант 1	45
Вариант 2	45
Вариант 3	45
Вариант 4	46
Вариант 5	46
Вариант 6	46
Вариант 7	47
Вариант 8	47
Вариант 9	47
Вариант 10	48
Решение заданий	49
Вариант 1. Часть 2	49

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 9 заданий с кратким ответом. Часть 2 содержит 5 заданий с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–14 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 15–21 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

ВАРИАНТ 1

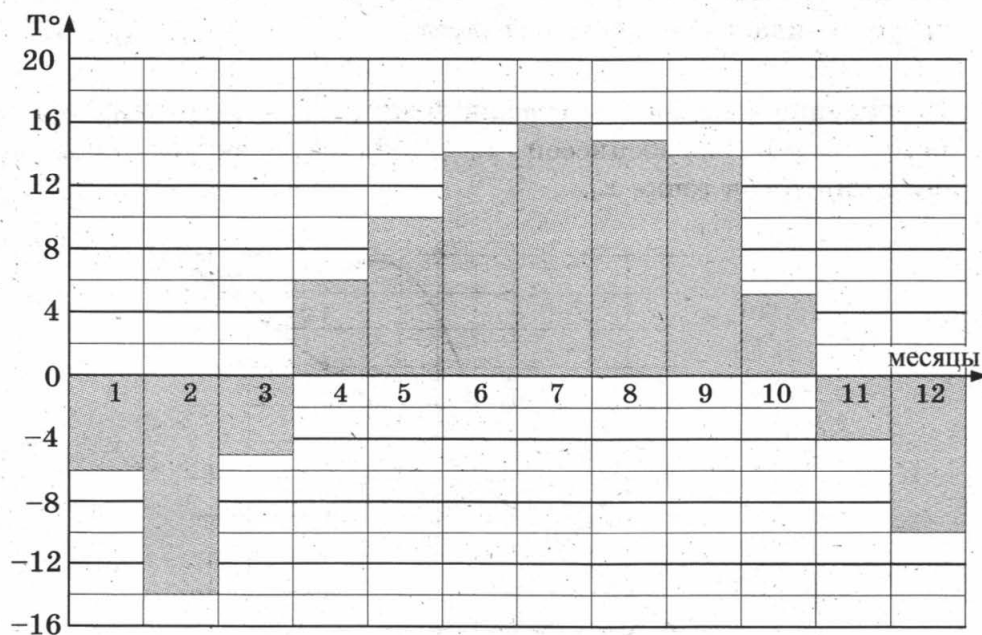
Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 26 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 590 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?
2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в 1994 году в Нижнем Новгороде.

	1
--	---

	2
--	---



3

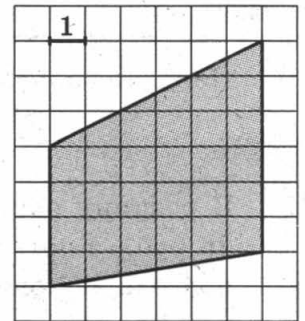
3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	11 900	15	12	910
Дельта	12 000	30	12	770
Омикрон	12 200	20	6	1700

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

4

4. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5

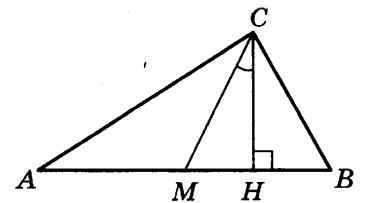
5. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно три раза.

6

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{15 - 7x} = 8$.

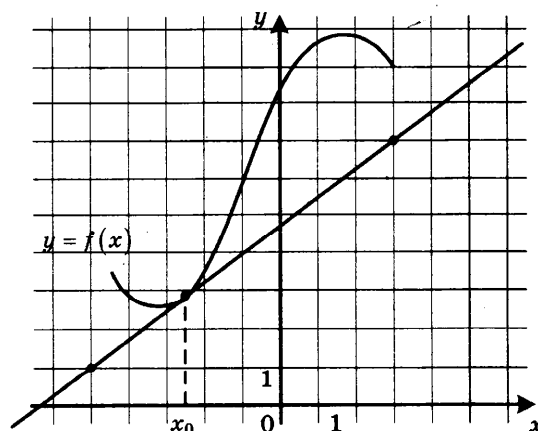
7

7. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 28° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

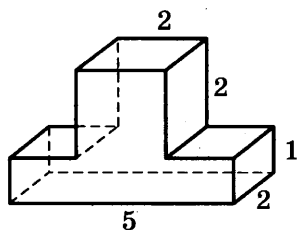


8

8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).


 9

Часть 2

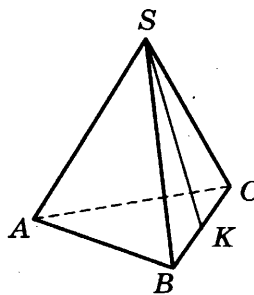
10. Найдите значение выражения $\frac{4 \cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

 10

11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{256} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $5,7 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

 11

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K — середина ребра BC , S — вершина. Известно, что $AB = 6$, а длина отрезка $SK = 7$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.


 12

13. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 50 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 15 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

 13

14. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 18x^2 + 17$ на отрезке $[-3; 3]$.

 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $2 \sin^4 x + 3 \cos 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

16

16. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

а) Постройте прямую пересечения плоскости SAC и плоскости, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC .

17

17. а) Решите неравенство $1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}$.

18

18. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

19

19. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

20

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

21

21. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

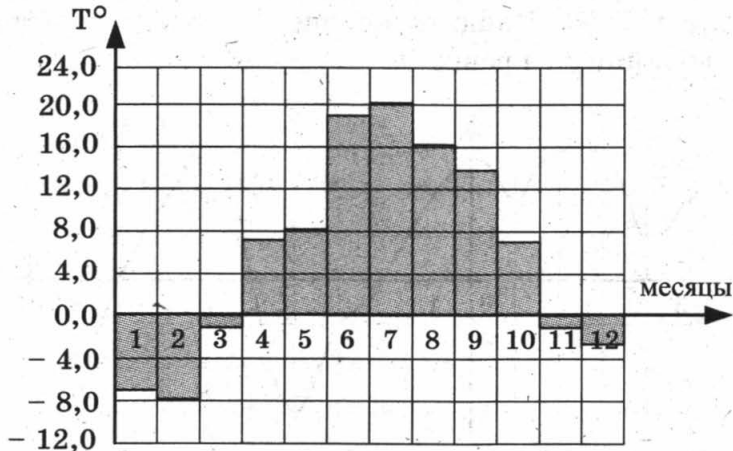
в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

ВАРИАНТ 2

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Для ремонта квартиры купили 42 рулона обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько месяцев второго полугодия 1999 года средняя температура была ниже 14°C .

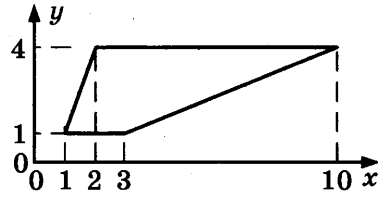


3. Керамическая плитка одной и той же торговой марки выпускается трёх разных размеров. Плитки упакованы в пачки. Пользуясь данными таблицы, определите, в каком случае цена одного квадратного метра плитки будет наименьшей. В ответ запишите найденную наименьшую цену квадратного метра в рублях.

Размер плитки (см)	Количество плиток в пачке	Цена пачки
20×30	20	612 р.
30×40	11	679 р. 80 к.
20×20	29	585 р. 80 к.

4

4. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



5

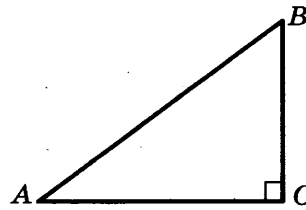
5. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

6

6. Решите уравнение $\sqrt{7-x} = 4$.

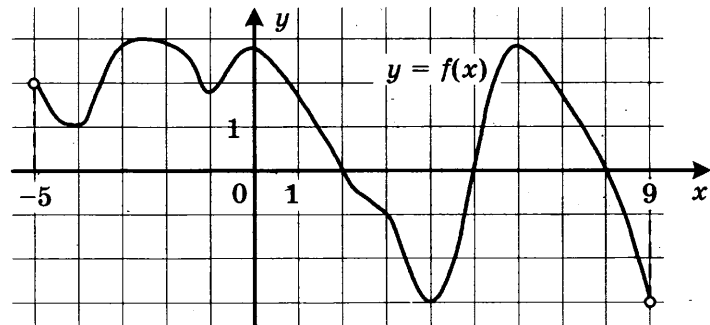
7

7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите $\sin B$.



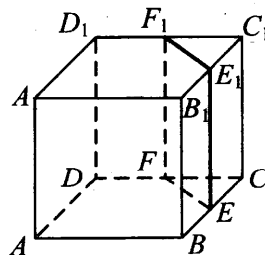
8

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



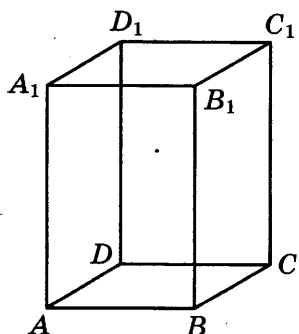
9

9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E, F, E_1 и F_1 являются серединами рёбер $BC, DC, B_1 C_1$ и $D_1 C_1$ соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1 , равен 21. Найдите объём куба.



Часть 2

10. Найдите значение выражения $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$.
11. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 9$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,1$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 33 секунд. Ответ дайте в кВ (киловольтах).
12. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30° . Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.



13. Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?
14. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 5)^5 - 5x$ на отрезке $[-4, 5; 0]$.

 10 11 12 13 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $7 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

16

16. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

а) Постройте прямую пересечения этой плоскости с плоскостью, проходящей через диаметры оснований, перпендикулярные этим хордам.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

17

17. Решите неравенство $2^x + 3 \cdot 2^{-x} \leq 4$.

18

18. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB , H — точка пересечения прямых CM и DK .

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH , если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

19

19. Степан хочет взять в кредит 1,2 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Степан взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 290 тысяч рублей?

20

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 7|x + 1| + 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2a + 3|x - 4a + 1|$$

имеет хотя бы один корень.

21

21. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел $-1, 2, 4, -6, 7, -8, -10, 12$. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $-1, 2, 4, -6, 7, -8, -10, 12$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

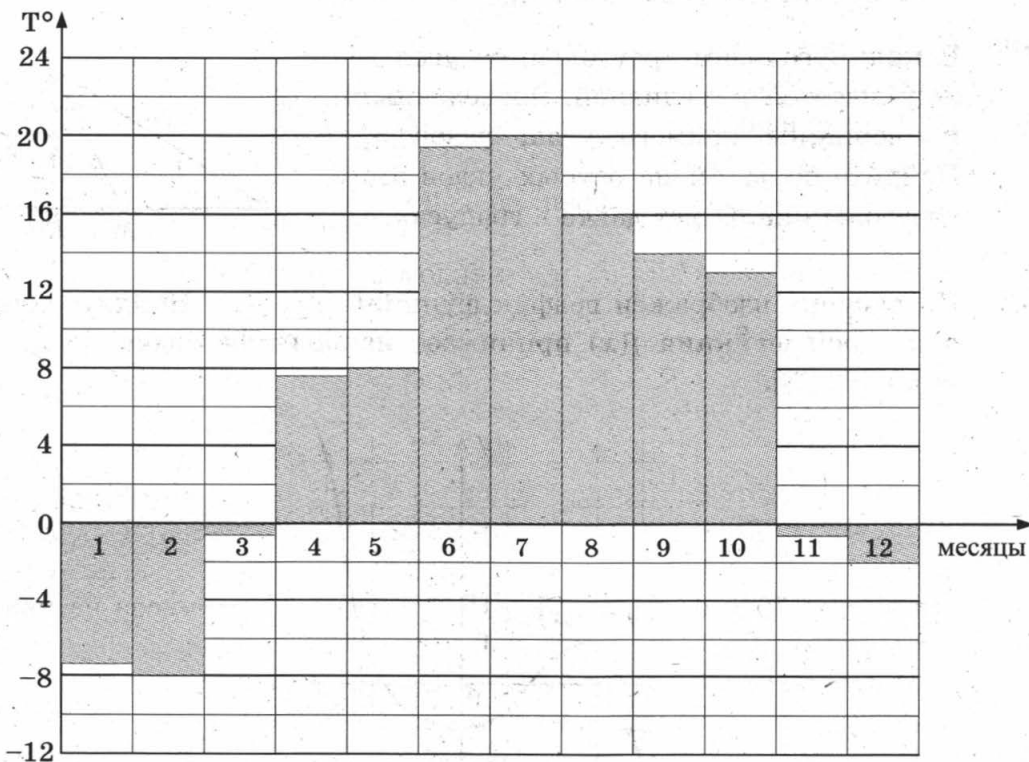
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

ВАРИАНТ 3

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Флакон шампуня стоит 170 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?
2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в Санкт-Петербурге в 1999 году.

 1 2

3

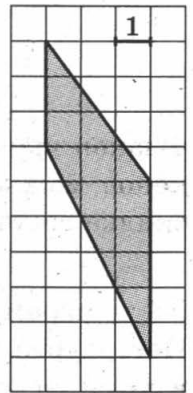
3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	9 400	10	6	1580
Дельта	9 500	20	12	720
Омикрон	9 900	20	6	1400

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дешевле всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наименьшую сумму в рублях.

4

4. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5

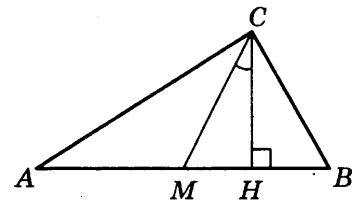
5. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет все три раза.

6

6. Найдите корень уравнения $\log_5(-2 - x) = 1$.

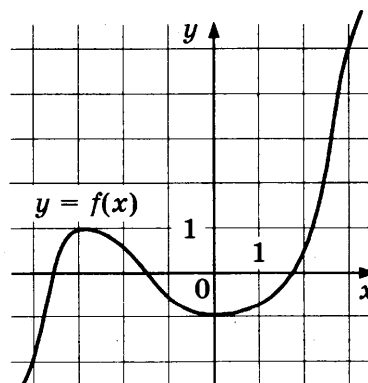
7

7. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 32° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

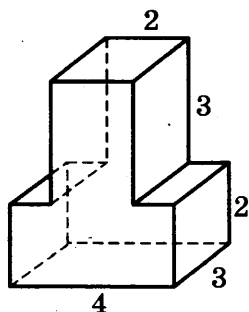


8

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите точку, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[-4; 3]$.



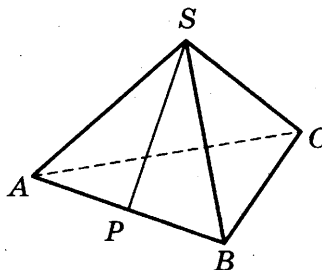
9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

10. Найдите значение выражения $\frac{2 \cos 28^\circ}{\cos 152^\circ}$.
11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{72} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $1,026 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P — середина ребра AB , S — вершина. Известно, что $BC = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка SP .



13. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 39 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 26 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.
14. В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$ принимает наименьшее значение?

9

10

11

12

13

14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

16

16. Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Точка L — середина ребра MB . Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые AO и LO перпендикулярны.

б) Найдите высоту данной пирамиды.

17

17. Решите неравенство $\frac{2x^2 - 8x}{x - 7} \leq x$.

18

18. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Прямая, проходящая через точку P , второй раз пересекает первую окружность в точке A , а вторую — в точке D . Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD , второй раз пересекает первую окружность в точке B , а вторую — в точке C .

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

19

19. 31 декабря 2014 года Владимир взял в банке некоторую сумму в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14%), затем Владимир переводит в банк 4 548 600 рублей. Какую сумму взял Владимир в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

20

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = |x - a| - x^2$ не меньше 1.

21

21. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

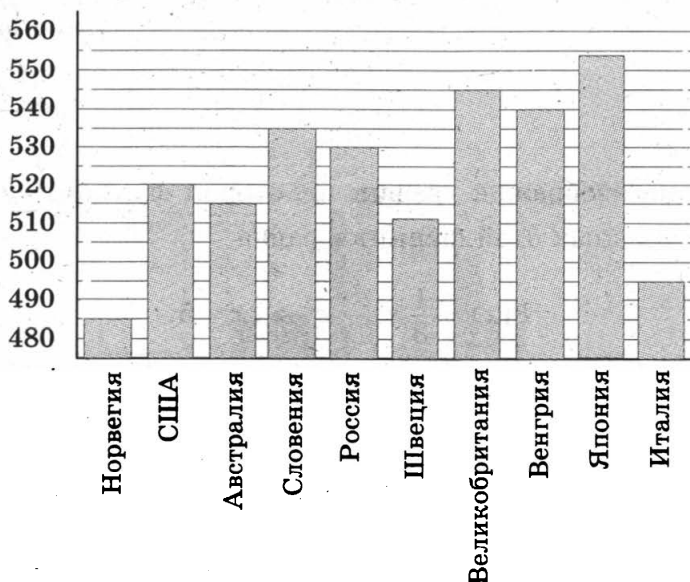
из них образуют геометрическую прогрессию?

ВАРИАНТ 4

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Для приготовления яблочного варенья на 1 кг яблок нужно 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 26 кг яблок?
2. На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран второе место принадлежит Великобритании. Определите, какое место занимает Россия.

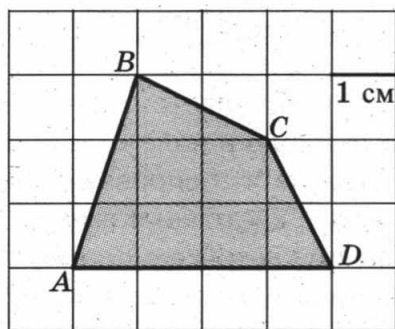


3. Для изготовления книжных полок требуется заказать 60 одинаковых стекол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла равна $0,15 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей нужно заплатить за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)
А	90	15
Б	80	20
В	140	Бесплатно

4

4. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$. Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5

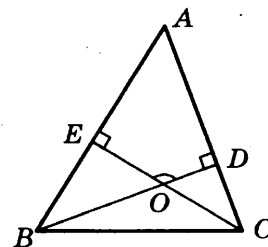
5. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

6

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x + 31} = 9$.

7

7. В треугольнике ABC угол A равен 56° , углы B и C — острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.

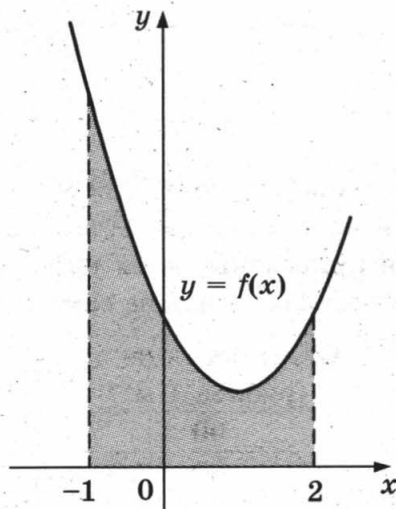


8

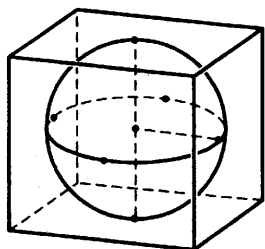
8. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 5.$$

Найдите площадь заштрихованной фигуры.



9. Шар, объём которого равен π , вписан в куб. Найдите объём куба.



9

Часть 2

10. Найдите значение выражения $\frac{9 \sin 132^\circ}{\sin 228^\circ}$.

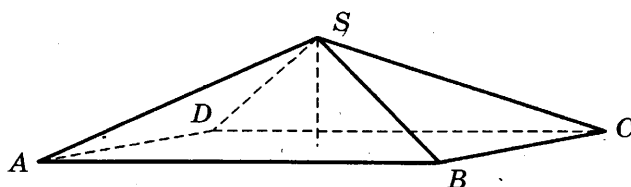
10

11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана — Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{256} \cdot 10^{11} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $46,17 \cdot 10^{12}$. Определите температуру этой звезды.

11

12. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 2, боковое ребро равно 8. Найдите её объём.

12



13. Первая труба наполняет бак объёмом 570 литров, а вторая труба — бак объёмом 530 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 4 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

13

14. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 5e^x - 2$ на отрезке $[-2; 1]$.

14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $19 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5; -4]$.

16

16. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра равны 1.

а) Постройте прямую пересечения плоскости ABB_1 и плоскости, проходящей через точки C, C_1 перпендикулярно плоскости ACC_1 .

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

17

17. Решите неравенство $1 + \log_6(4 - x) \leq \log_6(16 - x^2)$.

18

18. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB .

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 6$, $BC = 10$ и $\angle ACB = 30^\circ$.

19

19. 31 декабря 2014 года Сергей взял в банке 6 944 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

20

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 11|x + 2| + 3\sqrt{x^2 + 4x + 13} = 5a + 2|x - 2a + 2|$$

имеет хотя бы один корень.

21

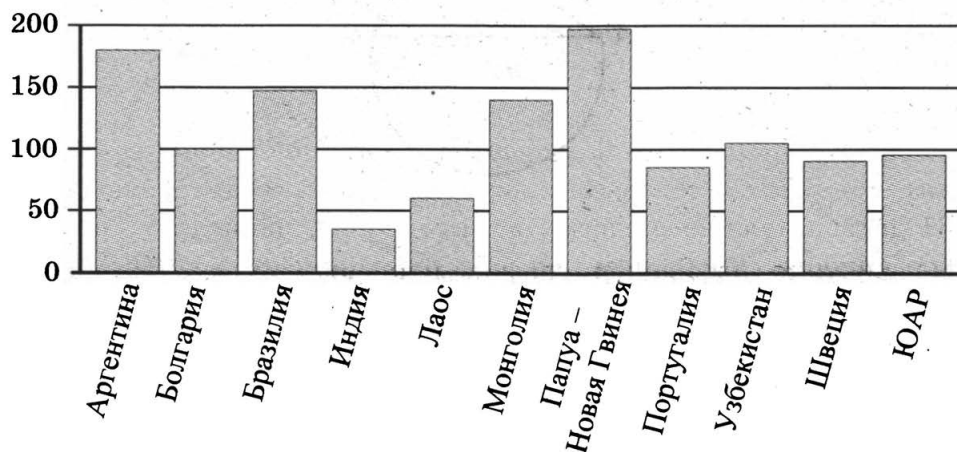
21. Решите уравнение $3^m + 4^n = 5^k$ в натуральных числах.

ВАРИАНТ 5

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В доме, в котором живёт Женя, один подъезд. На каждом этаже по восемь квартир. Женя живёт в квартире 87. На каком этаже живёт Женя?
2. На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа — Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимал Узбекистан?



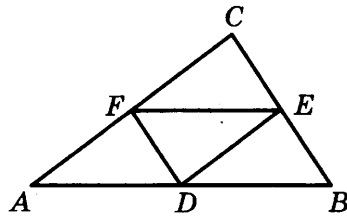
3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	19 400	5	6	3740
Дельта	19 900	5	12	1860
Омикрон	22 700	30	6	2800

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

4

4. Точки D, E, F — середины сторон треугольника ABC . Периметр треугольника DEF равен 5. Найдите периметр треугольника ABC .



5

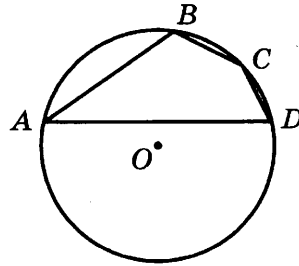
5. В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос о Великой Отечественной войне. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос о Великой Отечественной войне.

6

6. Найдите корень уравнения $\frac{1}{9x+2} = \frac{1}{8x-4}$.

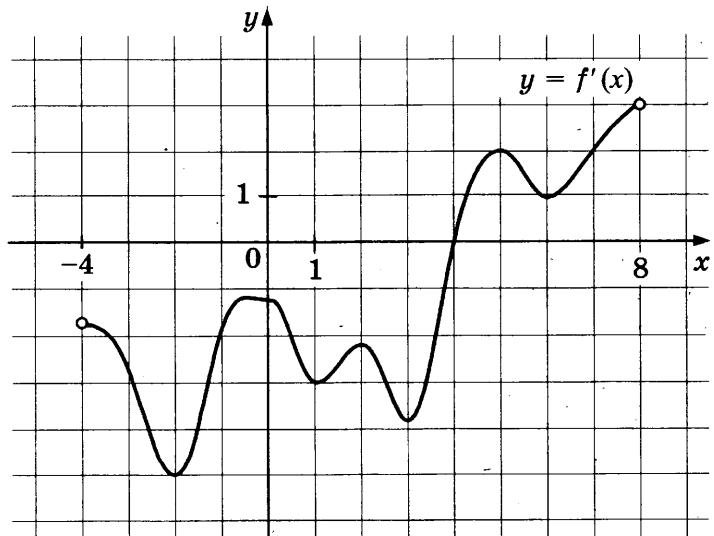
7

7. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 25° . Найдите угол C четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

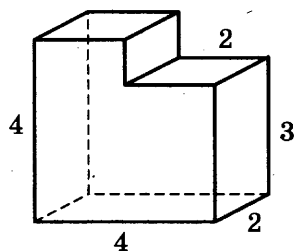


8

8. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. В какой точке отрезка $[-3; 1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).

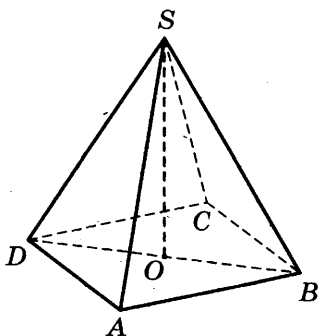


Часть 2

10. Найдите значение выражения $-\frac{22}{\cos^2 34^\circ + \cos^2 124^\circ}$.

11. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1.4} = \text{const}$, где p (атм) — давление в газе, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 256 л, а его давление равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде поднялось до 128 атмосфер? Ответ выразите в литрах.

12. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SA = 10$, $BD = 16$. Найдите длину отрезка SO .



13. Плиточник должен уложить 300 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 5 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 5 дней раньше, чем наметил. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

14. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2 + 49}{x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

9

10

11

12

13

14

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

16

16. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC .

а) Постройте прямую пересечения плоскости, проходящей через середины ребер AB , AC и SA , и плоскости, проходящей через середину ребра BC и перпендикулярной ему.

б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA = \sqrt{5}$, $AB = AC = 5$, $BC = 2\sqrt{5}$.

17

17. Решите неравенство $\log_{|x+1|}^2 (x+1)^4 + \log_2 (x+1)^2 \leq 22$.

18

18. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC , причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O .

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC .

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC , если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$.

19

19. Тимофей хочет взять в кредит 1,1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Тимофей взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 270 тысяч рублей?

20

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + 3x + a$$

не имеет корней.

21

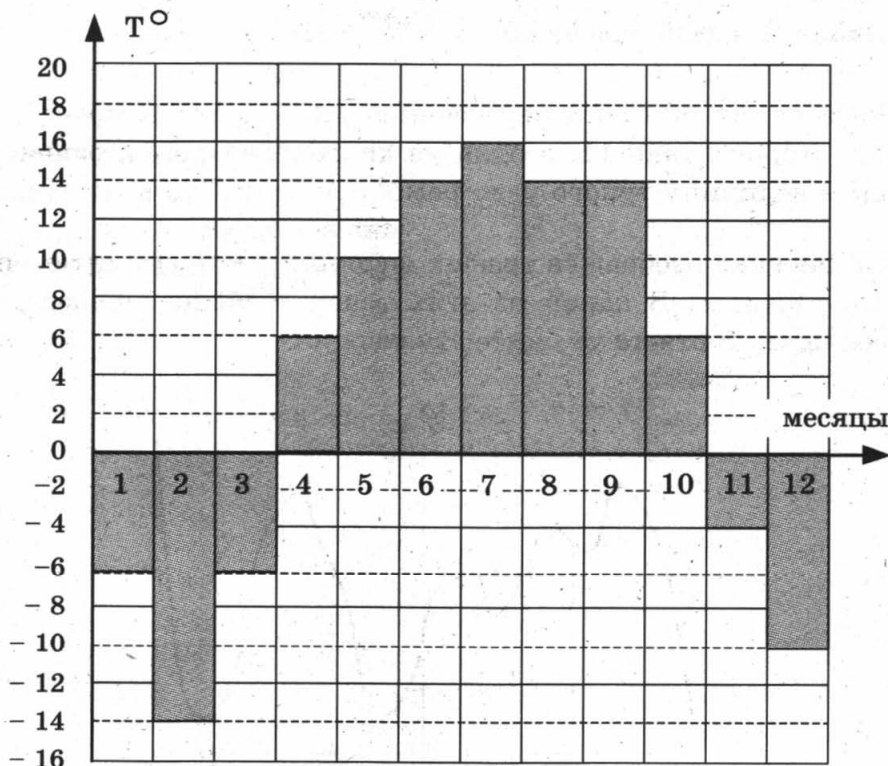
21. Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трёхчлена и его значение в точке $x = 11$ являются простыми числами. Найдите корни трёхчлена.

ВАРИАНТ 6

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 13 920 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3

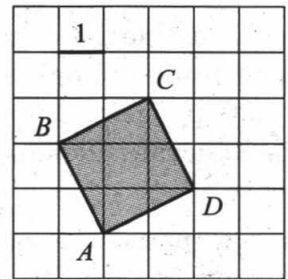
3. В таблице указаны цены (в рублях) на некоторые продукты питания в трёх городах России (по данным на май 2014 года).

Наименование продукта	Хабаровск	Пенза	Челябинск
Говядина (1 кг)	339	247	255
Подсолнечное масло (1 л)	77	56	67
Молоко (1 л)	83	54	60
Сыр (1 кг)	486	284	282
Рис (1 кг)	59	40	54
Картофель (1 кг)	51	24	33

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 кг говядины, 3 л подсолнечного масла, 1 кг сыра. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

4

4. Найдите площадь квадрата $ABCD$.



5

5. В каждой двадцать пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Коля покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Коля не найдёт приз в своей банке.

6

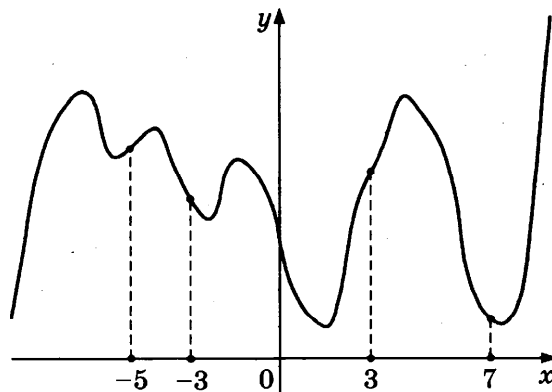
6. Найдите корень уравнения $(x + 7)^3 = 216$.

7

7. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 11, а одна из диагоналей ромба равна 44. Найдите величину тупого угла ромба. Ответ дайте в градусах.

8

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-5, -3, 3, 7$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



9. Объем данного правильного тетраэдра равен 2 см^3 . Найдите объем правильного тетраэдра, ребро которого в 3 раза больше ребра данного тетраэдра. Ответ дайте в см^3 .

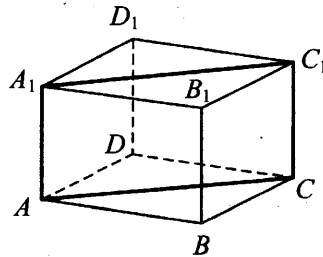
 9

Часть 2

10. Найдите значение выражения $\log_6 144 - \log_6 4$.
11. К дну высокого цилиндрического резервуара приварена трубка с краном. После открытия крана вода начинает вытекать из резервуара, при этом высота столба воды (в метрах) меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 5 \text{ м}$ — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{800}$ — отношение площадей сечений трубки и резервуара, а $g = 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения. Через сколько секунд после открытия крана в резервуаре останется четверть первоначального объема воды?
12. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AA_1 равно 10, а диагональ BD_1 равна 26. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A , A_1 и C .

 10

 11

 12


13. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 90 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 5 часов 24 минуты позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.
14. Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 6x^2 + 19$.

 13

 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $7 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

16

16. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Расстояние между этими хордами равно $2\sqrt{197}$.

а) Постройте прямую пересечения этой плоскости с плоскостью, проходящей через диаметры оснований, перпендикулярные этим хордам.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

17

17. Решите неравенство $(\log_2(x+4,2)+2)(\log_2(x+4,2)-3) \geq 0$.

18

18. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M . Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q , причём точка P лежит между точками D и Q . Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM .

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 32$. Найдите сторону AD .

19

19. 1 января 2015 года Михаил Юрьевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем Михаил Юрьевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Михаил Юрьевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 250 тыс. рублей?

20

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^6 + (5a - 8x)^3 + 3x^2 + 15a = 24x$$

не имеет корней.

21

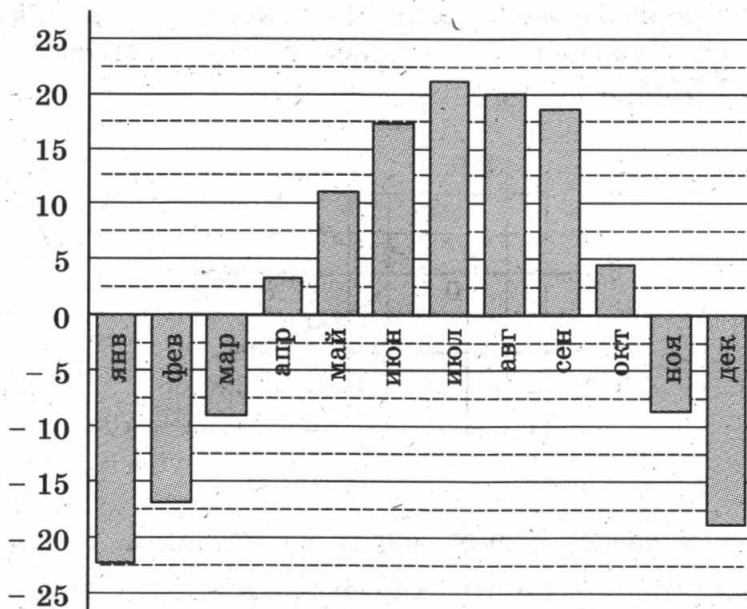
21. Десятичная запись натурального числа n должна состоять из различных (не менее двух) цифр одной чётности, а само оно должно быть квадратом целого числа. Найдите все такие n .

ВАРИАНТ 7

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

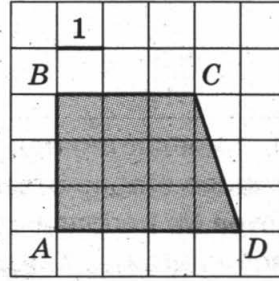
1. Для покраски потолка требуется 140 г краски на 1 м². Краска продаётся в банках по 3 кг. Сколько банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 42 м²?
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Хабаровске по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев, когда среднемесячная температура в Хабаровске отрицательна.



3. Для того чтобы связать свитер, хозяйке нужно 400 граммов шерстяной пряжи красного цвета. Можно купить красную пряжу по цене 60 рублей за 50 граммов, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 50 рублей за 50 граммов и окрасить её. Один пакетик краски стоит 10 рублей и рассчитан на окраску 200 граммов пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответ напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

4

4. Найдите площадь трапеции $ABCD$.



5

5. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день запланировано 20 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

6

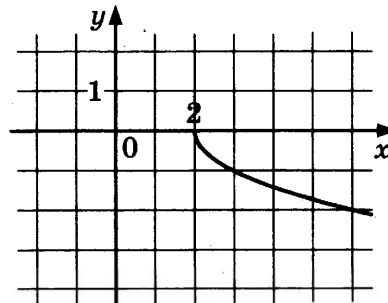
6. Решите уравнение $\log_{25}(2 - 3x) = 0,5$.

7

7. В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно 45° и 67° . Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины C . Ответ дайте в градусах.

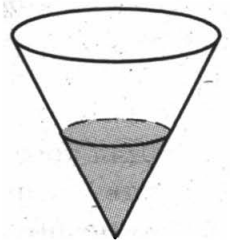
8

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-1; 1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 3. Найдите $f'(3)$.



9

9. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 25 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

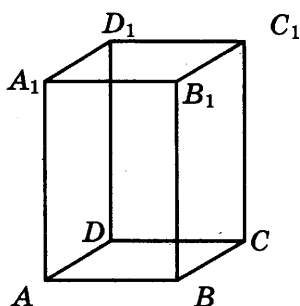
10. Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

 10

11. Высоту над землей (в метрах) подброшенного вверх камня можно вычислять по формуле $h(t) = 1,4 + 14t - 5t^2$, где t — время в секундах. Сколько секунд камень будет находиться на высоте более 8 метров?

 11

12. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30° . Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.

 12


13. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 46 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

 13

14. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 12x^2 + 15$.

 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $2 \sin(\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$.

 15

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

16

16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11.
- Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки C , A_1 и F_1 .
 - Найдите расстояние от точки C до прямой $A_1 F_1$.

17

17. Решите неравенство $\log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4$.

18

18. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.
- Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.
 - Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 3 и 2.

19

19. 31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Олег переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Под какой процент Олег взял деньги в банке?

20

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$8x^6 + 4x^2 = (3x + 5a)^3 + 6x + 10a$$

не имеет корней.

21

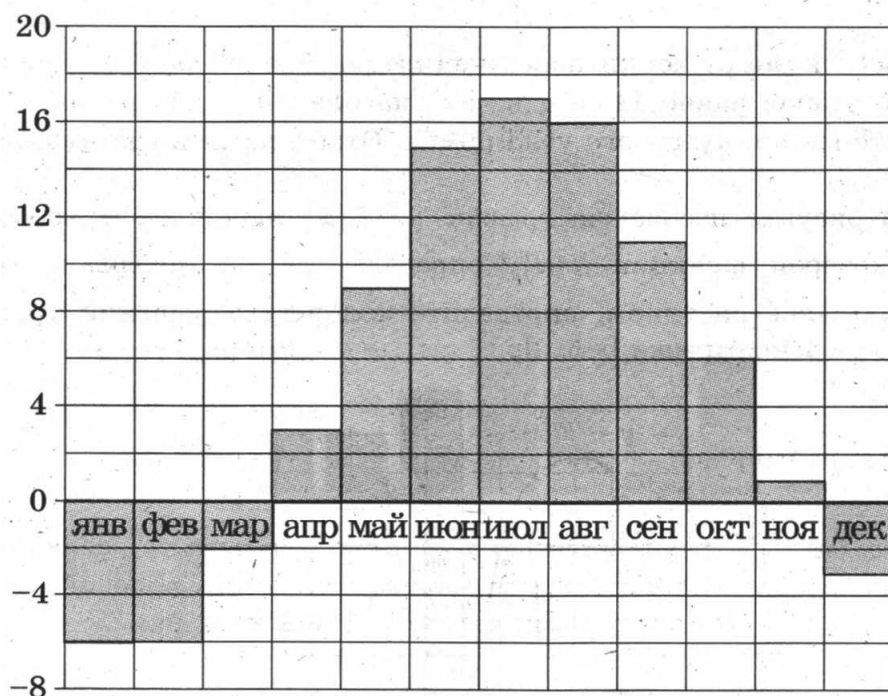
21. Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n , при которых уравнение $(x^2 + y^2)^{2010} = x^n \cdot y^n$ имеет натуральные решения.

ВАРИАНТ 8

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В магазине «Сделай сам» мебель продаётся в разобранном виде. При желании покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 15% от стоимости самой мебели. Во сколько рублей обойдётся кухонный шкаф вместе со сборкой, если без сборки он продаётся за 3200 руб.?
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Хельсинки за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура была отрицательная.

 1 2

3

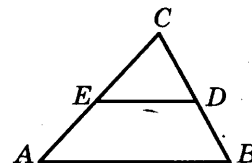
3. В таблице указаны цены (в рублях) на некоторые продукты питания в трёх городах России (по данным на май 2014 года).

Наименование продукта	Краснодар	Барнаул	Казань
Говядина (1 кг)	239	215	239
Подсолнечное масло (1 л)	62	52	60
Молоко (1 л)	56	56	50
Сыр (1 кг)	295	261	277
Рис (1 кг)	43	39	39
Картофель (1 кг)	42	30	31

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 1 кг говядины, 3 л молока, 2 кг риса. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

4

4. Площадь треугольника ABC равна 28. DE — средняя линия. Найдите площадь трапеции $ABDE$.



5

5. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день запланировано 20 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

6

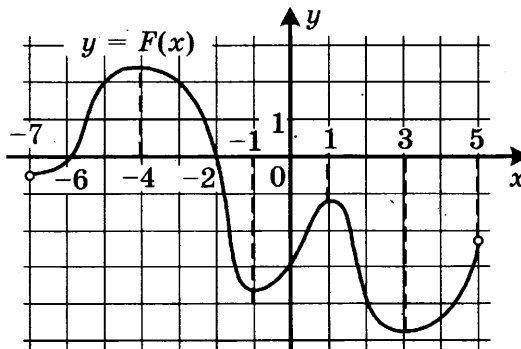
6. Решите уравнение $2^{5-x} = 0,25$.

7

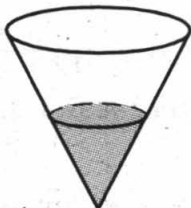
7. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 11, а одна из диагоналей ромба равна 44. Найдите величину тупого угла ромба. Ответ дайте в градусах.

8

8. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 2]$.



9. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 12 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?


 9

Часть 2

10. Найдите значение выражения $\frac{5 \sin 61^\circ}{\sin 299^\circ}$.
11. Компания Яндекс-Маркет вычисляет рейтинг интернет-магазинов по формуле

 10

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1)r_{\text{пок}} + 0,1},$$

 11

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами компании (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина «Эпсилон», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 24, их средняя оценка равна 0,86, а оценка экспертов равна 0,61.

12. Высота PH боковой грани PCD правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ равна $4\sqrt{3}$ и равна стороне CD основания пирамиды. Найдите расстояние между прямыми AB и PH .

 12

13. Три килограмма черешни стоят столько же, сколько пять килограммов вишни, а три килограмма вишни — столько же, сколько два килограмма клубники. На сколько процентов килограмм клубники дешевле килограмма черешни?

 13

14. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 2x + 17}$.

 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $4^x - 2^{x+3} + 12 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

16

16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра равны 1.

а) Постройте прямую пересечения плоскости $AA_1 DD_1$ с плоскостью, проходящей через точки D , B_1 и F_1 .

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и $DB_1 F_1$.

17

17. Решите неравенство $4^{x-3} - 71 \cdot 2^{x-6} + 7 \leq 0$.

18

18. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 4 и 3. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

19

19. 31 декабря 2014 года Сергей взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк 2 662 000 рублей. Какую сумму взял Сергей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

20

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = |x - a| - x^2$ не меньше 1.

21

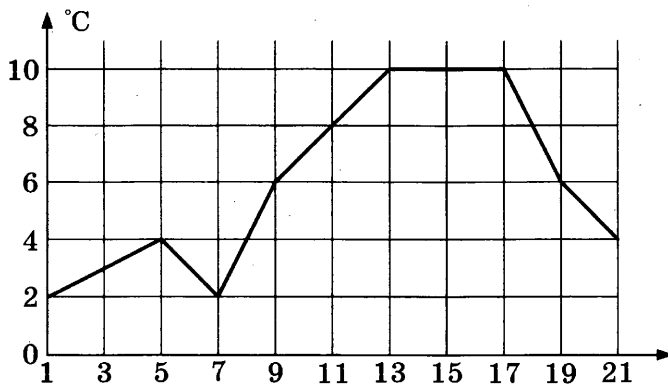
21. Друг за другом подряд выписали десятичную запись чисел 2^{50} и 5^{50} . Сколько всего цифр выписали?

ВАРИАНТ 9

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Пакет молока стоит 21 рубль 30 копеек.
Сколько пакетов молока можно купить на 500 рублей?
2. Первый посев семян петрушки рекомендуется проводить в апреле при дневной температуре воздуха не менее $+6^{\circ}\text{C}$. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха на первые три недели апреля. Определите, в течение скольких дней за этот период можно производить посев петрушки.



3. В магазине одежды объявлена акция — если покупатель приобретает товар на сумму свыше 5000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин.

Покупатель В. хочет приобрести куртку ценой 4500 руб., рубашку ценой 800 руб. и кеды ценой 1600 руб. В каком случае В. заплатит за покупку меньше всего?

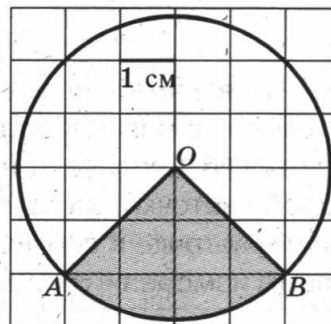
1. В. купит все три товара сразу.
2. В. купит сначала куртку и рубашку, а потом кеды со скидкой.
3. В. купит сначала куртку и кеды, а потом рубашку со скидкой.

В ответ запишите сумму, которую заплатит В. за покупку в этом случае.

 1 2 3

4

4. Найдите площадь S сектора. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$. Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5

5. Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 56 шашистов, среди которых 12 участников из России, в том числе Валерий Стремянкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Валерий Стремянкин будет играть с каким-либо шашистом из России.

6

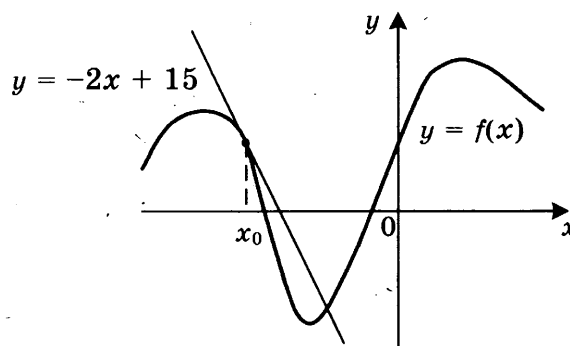
6. Найдите корень уравнения $5^{4-x} = 25$.

7

7. Отрезок AB является хордой окружности с центром O . Найдите угол между прямой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A , если угол AOB равен 56° . Ответ дайте в градусах.

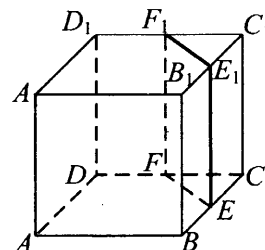
8

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = -\frac{1}{4}f(x) + 5$ в точке x_0 .



9

9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E, F, E_1 и F_1 являются серединами рёбер $BC, DC, B_1 C_1$ и $D_1 C_1$ соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1 , равен 14. Найдите объём куба.



Часть 2

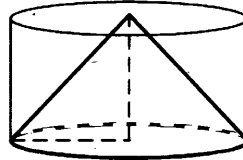
10. Вычислите значение выражения $3^{\log_3 7} + 49^{\log_7 \sqrt{13}}$.

 10

11. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 4 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 2 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 22$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 27,2 секунды. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

 11

12. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.


 12

13. В сосуд, содержащий 7 литров 15-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 8 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

 13

14. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (21 - x)e^{20-x}$$

на отрезке $[19; 21]$.

 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. Решите уравнение

$$\frac{(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \log_{13}(2 \sin^2 x)}{\log_{31}(\sqrt{2} \cos x)} = 0.$$

 15

16

16. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 4. Точка L — середина ребра SC . Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{17}}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.
 б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

17

17. Решите неравенство $\frac{2x^2 - 10x + 6}{x - 5} \leq x$.

18

18. Окружность с центром O вписана в угол, равный 60° . Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O .

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.
 б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{3}$.

19

19. 31 декабря 2014 года Георгий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Георгий переводит очередной транш. Георгий выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 570 тыс. рублей, во второй 599,4 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Георгию?

20

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\left| \frac{x^2 + x - 2a}{x + a} - 1 \right| \leq 2$ не имеет решений на интервале $(1; 2)$.

21

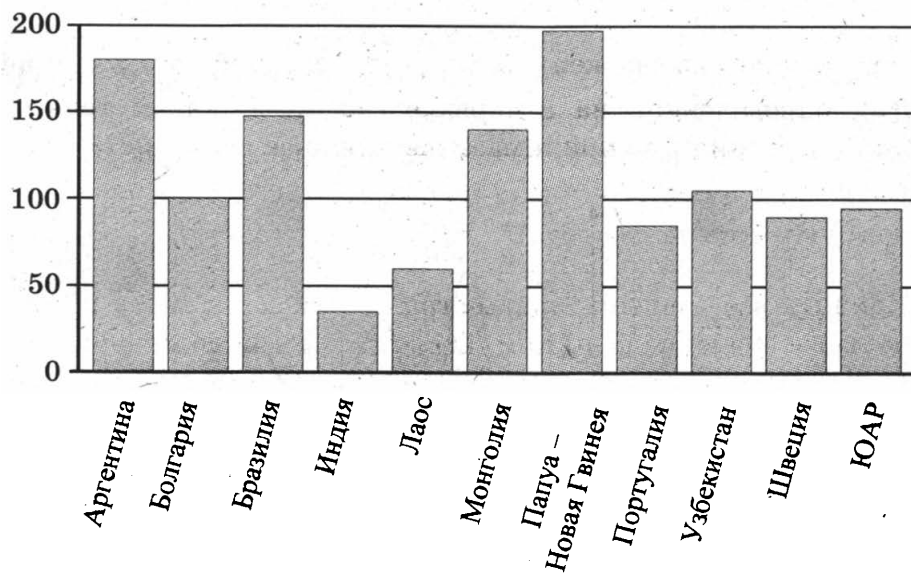
21. Решите в целых числах уравнение $3^n + 8 = x^2$.

ВАРИАНТ 10

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 2500 руб. До установки счётчиков Александр платил за воду (холодную и горячую) ежемесячно 1700 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 1000 руб. при тех же тарифах на воду. За какое наименьшее количество месяцев при тех же тарифах на воду установка счётчиков окупится?
2. На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа – Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Аргентина?



3

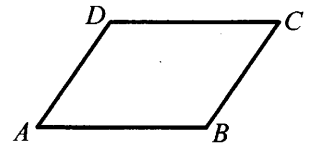
3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	21 600	20	6	3600
Дельта	22 300	15	12	1860
Омикрон	24 000	20	12	1750

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

4

4. Периметр параллелограмма равен 70. Меньшая сторона равна 16. Найдите большую сторону параллелограмма.



5

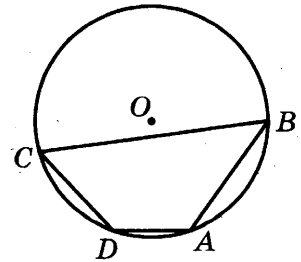
5. В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 5 из них встречается вопрос по теории вероятностей. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теории вероятностей.

6

6. Найдите корень уравнения $\frac{1}{2x+7} = \frac{1}{3x+20}$.

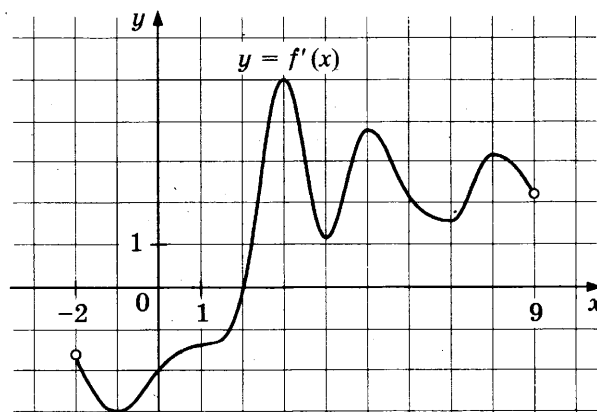
7

7. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 125° и 47° . Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

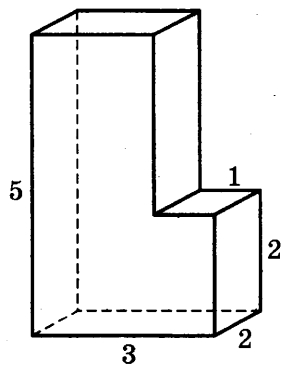


8

8. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[3; 8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).


 9

Часть 2

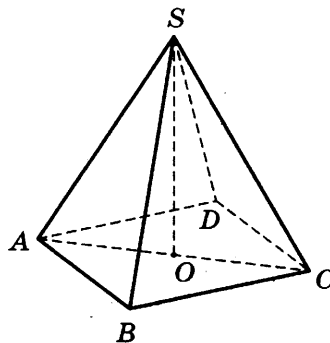
10. Найдите значение выражения $\frac{34}{\cos^2 101^\circ + \cos^2 191^\circ}$.

 10

11. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1,4} = \text{const}$, где p (атм) — давление в газе, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 24 л, а его давление равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде поднялось до 128 атмосфер? Ответ выразите в литрах.

 11

12. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SA = 20$, $AC = 24$. Найдите длину отрезка SO .


 12

13. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 10 минут, второй и третий — за 15 минут, а первый и третий — за 24 минуты. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

 13

14. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x^2 + 25}{x}$.

 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x + (2 - \sqrt{2}) \cos x + \sqrt{2} - 2 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

16

16. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $7\sqrt{10}$.

а) Постройте прямую пересечения этой плоскости с плоскостью, проходящей через диаметры оснований, перпендикулярные этим хордам.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

17

17. Решите неравенство $\log_{x+1}(x-1) \cdot \log_{x+1}(x+2) \leq 0$.

18

18. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 5 и 3. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

19

19. 31 декабря 2014 года Леонид взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Леонид переводит очередной транш. Леонид выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 700 тыс. рублей, во второй 440 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Леониду?

20

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\left| \frac{x^2 - 6x + a}{a - 2x} - 2 \right| \leq 1$ справедливо при всех значениях x из отрезка $[0; 1]$.

21

21. Найдите все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая единицу и само число).

ОТВЕТЫ

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
60	5	12840	30	0,25	-7	59	0,75	18	-4	4000	63	60	17

15	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$
16	36
17	$[-1 - 2\sqrt{6}; 0), (0; 1 + 2\sqrt{6}]$
18	$\frac{63}{2}$
19	5
20	$1,5 \leq a \leq 3; a \geq 6$
21	а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	4	505	15	0,17	-9	0,8	6	168	-2	2,25	6	9	20

15	а) $\left\{ \left((-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$
16	б) $\arctg \frac{21}{17}$
17	$[0; \log_2 3]$
18	49
19	6
20	$[7 - \sqrt{39}; 7 + \sqrt{39}]; [-5 - \sqrt{15}; -5 + \sqrt{15}]$
21	а) нет; б) нет; в) 16

Вариант 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	5	10380	12	0,125	-7	61	3	42	-2	6000	4	52	4

15	а) $\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; \frac{17\pi}{6}; 3\pi$
16	5
17	$(-\infty; 0], [1; 7)$
18	2
19	7 490 000
20	$a \leq -0,75; a \geq 0,75$
21	а) нет, б) нет, в) да.

Вариант 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
32	5	1260	7,5	0,5	25	124	6	6	-9	1200	80	53	-8,25

15	a) $0; -\log_2 19$; б) $-\log_2 19$
16	$\frac{1}{4}$
17	$[2; 4)$
18	7
19	2 916 000
20	$\left[\frac{9-3\sqrt{5}}{2}; \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \right]$
21	$m = n = k = 2$

Вариант 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
11	5	23610	10	0,26	-6	155	1	28	-22	8	6	15	7

15	a) $-\arctg 2 + \pi n, -\arctg 3 + \pi m, n, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi - \arctg 2, -\pi - \arctg 3$
16	б) 1
17	$[-9; -2), (-2, -1), (-1, 0), (0; 7]$
18	1:15
19	6
20	$\left(-\infty; -\frac{9}{16} \right)$
21	$x_1 = 12, x_2 = 13$

Вариант 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16000	30	946	5	0,96	-1	120	3	54	2	400	240	10	-4

15	a) $\left\{ \left((-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$
16	14
17	$(-4, 2; -3, 95], [3, 8; +\infty)$
18	$\frac{85}{3}$
19	5
20	$\left(\frac{16}{5}; +\infty \right)$
21	64 и 6084

Вариант 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	5	420	10,5	0,375	-1	11	-0,5	175	-0,4	1,6	6	53	8

15	а) πk ; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) -5π ; -4π
16	14
17	$[-1; 4)$
18	0,96
19	12,5
20	$\left(-\infty; -\frac{9}{40}\right)$
21	2011, 3015

Вариант 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3680	4	461	21	0,375	7	120	3	312	-5	0,81	6	10	4

15	а) 1; $\log_2 6$; б) $\log_2 6$
16	$\frac{2}{3}$
17	$[\log_2 7; 6]$
18	$\frac{96}{7}\sqrt{3}$
19	6 620 000
20	$a \leq -0,75$; $a \geq 0,75$
21	51

Вариант 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
23	11	6740	2	0,2	2	28	0,5	112	20	5,5	1	7	1

15	$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
16	80
17	$[1; \log_2 5]$
18	$3\sqrt{5}$
19	11
20	$\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right]$; $[8; +\infty)$
21	$n = 0$, $x = 3$; $n = 0$, $x = -3$

Вариант 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	2	25920	19	0,25	-13	55	3	24	34	0,75	16	9,6	-5

15	а) $2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}$
16	б) $\arctg 3$
17	$(-\infty; -1], [2; +\infty)$
18	$\frac{15}{2}\sqrt{15}$
19	10
20	$(-\infty; 0)$
21	2500 или 400

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

Часть 2

15. а) Решите уравнение $2 \sin^4 x + 3 \cos 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

Из неё следует, что $\sin^4 x = \frac{1}{4}(\cos^2 2x - 2 \cos 2x + 1)$.

Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{2} \cos^2 2x - \cos 2x + \frac{1}{2} + 3 \cos 2x + 1 = 0;$$

$$\cos^2 2x + 4 \cos 2x + 3 = 0.$$

Сделаем замену $t = \cos 2x$. Получим

$$t^2 + 4t + 3 = 0;$$

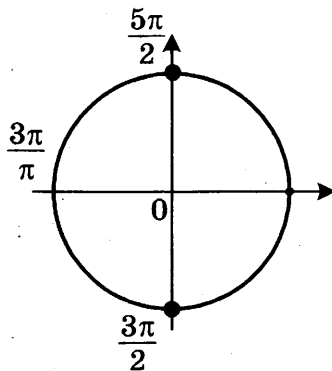
$$t = -1 \text{ или } t = -3;$$

$$\cos 2x = -1 \text{ или } \cos 2x = -3.$$

Уравнение $\cos 2x = -3$ не имеет решений. Из уравнения $\cos 2x = -1$ получаем

$$2x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим $x = \frac{3\pi}{2}$; $x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$.

16. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.
- а) Постройте прямую пересечения плоскости SAC и плоскости, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания.
- б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC .

Решение.

Площадь основания пирамиды равна $144 - 108 = 36$, поэтому $AB = 6$.

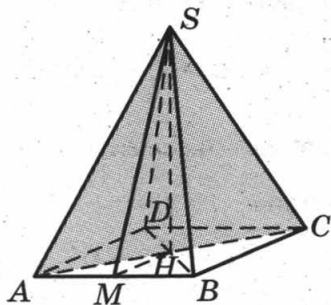
Площадь боковой грани равна $\frac{108}{4} = 27$.

Пусть SM — высота грани SAB . Тогда $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = SM \cdot 3 = 27$, поэтому $SM = 9$.

а) Пусть SH — высота пирамиды. Тогда H — середина основания пирамиды. Значит, SH — искомая прямая.

б) Имеем $SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Тогда $S_{SAC} = \frac{SH \cdot AC}{2} = 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 36$.



Ответ: 36.

17. Решите неравенство $1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x^2 - 2|x| - 23}{x^2} \leq 0;$$

$$\frac{(|x| - 1 - 2\sqrt{6})(|x| - 1 + 2\sqrt{6})}{x^2} \leq 0.$$

Учитывая, что $|x| + 2\sqrt{6} - 1 > 0$ при всех значениях x , получаем:

$$|x| - 1 - 2\sqrt{6} \leq 0 \text{ при условии } x \neq 0.$$

Тогда $-1 - 2\sqrt{6} \leq x < 0$ или $0 < x \leq 1 + 2\sqrt{6}$.

Ответ: $[-1 - 2\sqrt{6}; 0), (0; 1 + 2\sqrt{6}]$.

18. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.
- а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
- б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

Решение:

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB , поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1 , у этих треугольников общая:

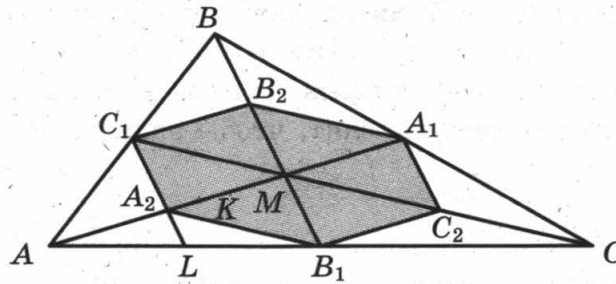
$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

Аналогично получаем ещё 5 равенств:

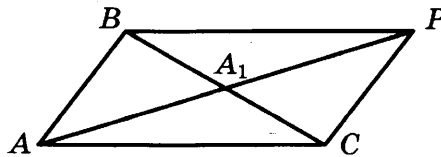
$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}, S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}, S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}, S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ и } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$S_{ABC} = 2S_{A_1B_2C_1A_2B_1C_2}.$$



б) Обозначим длины сторон BC , AC , AB треугольника ABC через a , b , c .



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2, \text{ откуда } AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Аналогично доказывается, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$.

Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника ABM , значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC : $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$. Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$\begin{aligned} 2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) &= \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \\ &= \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC , получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{63}{2}$.

Ответ: $\frac{63}{2}$.

19. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

Решение:

Заметим, что за 4 месяца Александр Сергеевич выплатит 1,1 млн рублей. Таким образом, он не покроет долг с процентами.

Каждый месяц долг увеличивается не более, чем на $1\,100\,000 \cdot 0,01 = 11\,000$ рублей. Значит, за пять месяцев Александр Сергеевич должен будет выплатить не более $1\,100\,000 + 5 \cdot 11\,000 = 1\,155\,000$ рублей, что менее чем $5 \cdot 275\,000 = 1\,375\,000$ рублей. Таким образом, Александр Сергеевич сможет выплатить кредит за 5 месяцев.

Ответ: 5.

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

Решение:

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x - a^2 + 3a - 1) - (x - a^2 + a + 2) = 2a - 3.$$

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 3a - 1$, $n = x - a^2 + a + 2$.

Тогда уравнение примет вид:

$$|m| + |n| = m - n.$$

Это равносильно условию $n \leq 0 \leq m$. Получаем

$$\begin{aligned} x - a^2 + a + 2 \leq 0 \leq x - a^2 + 3a - 1; \\ a^2 - 3a + 1 \leq x \leq a^2 - a - 2. \end{aligned}$$

Уравнение имеет корни, ни один из которых не принадлежит интервалу (4; 19), только если правая граница отрезка решений не больше 4 или левая граница не меньше 19. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 1 \leq a^2 - a - 2, \\ a^2 - a - 2 \leq 4, \\ a^2 - 3a + 1 \geq 19; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a \geq 3, \\ a^2 - a - 6 \leq 0, \\ a^2 - 3a - 18 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 1,5, \\ (a - 3)(a + 2) \leq 0, \\ (a - 6)(a + 3) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 1,5, \\ a \leq -3, \\ -2 \leq a \leq 3, \\ a \geq 6. \end{cases}$$

Ответ: $1,5 \leq a \leq 3; a \geq 6$.

21. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
- б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
- в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

а) Пример: 1, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов равна $36 - 14 = 22$. Если добавить число 4, то разность будет равна $100 - 30 = 70$, что ровно на 48 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии a_1, a_2, \dots, a_n . Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 = \\ & = 2a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + \\ & + 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + \\ & + \dots + \\ & + 2a_3(a_1 + a_2) + \\ & + 2a_2a_1. \end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1} , то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2(a_1 + nd) \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = (a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n,$$

где d — разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n \geq n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1440,$$

откуда $n \leq 11$. Значит, 12 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n = 1440$ следует, что n является делителем числа 1440. Значит, $n \neq 11$.

Если $n = 10$, получаем

$$(a_1 + 10d)(2a_1 + 9d) = 144.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $90d^2 \geq 90 \cdot 4 = 360 > 144$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 29a_1 - 54 = 0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n = 9$, получаем

$$(a_1 + 9d)(2a_1 + 8d) = 160.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $72d^2 \geq 72 \cdot 4 = 288 > 160$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$a_1^2 + 13a_1 - 44 = 0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n = 8$, получаем:

$$(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 180.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 180$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 23a_1 - 124 = 0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 4.

Значит, прогрессия из восьми чисел 4, 5, 6, ..., 11 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8.

Бланк ответов № 1



Заполнять гелевой или капиллярной ручкой ЧЕРНЫМИ чернилами ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ 7 6 5 4 3 2 1 0
А В С D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z ,

Region, Code of subject, Name of subject input fields

С правилами экзамена ознакомлен и согласен. Сопадение номеров вариантов в задании и бланке регистрации подтверждаю. Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка

Number of variant input fields

ВНИМАНИЕ! Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета

Результаты выполнения заданий с ответом в краткой форме

Grid for answers 1-40

Additional grid for answers

