МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГАОУ ВПО «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ

**Курсовая работа**

по дисциплине

«Фундаментальная и компьютерная алгебра»

на тему:

«Отделение действительных корней многочленов»

**Выполнила:**

Буняева Ирина Евгеньевна студентка группы МКН-б-о-13-1 направления 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» очной формы обучения

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(подпись)

**Руководитель работы:**

Бондарь В.В., заведующая кафедрой высшей алгебры и геометрии

Работа допущена к защите \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

 (подпись руководителя) (дата)

Работа выполнена и

защищена с оценкой \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Дата защиты\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Члены комиссии: доцент \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В.В.Бондарь

(должность) (подпись) (И.О. Фамилия)

 профессор \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ О.П.Молофей

 доцент \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Л.П.Копыткова

Ставрополь, 2015 г.

Введение………………………………………………………………………….

1 Отделение действительных корней многочленов…………………………...

1.1 Теорема Штурма…………………………………………………............

1.2 Другие теоремы о числе действительных корней…………………………

1.3 Теорема Бюдана-Фурье и Декарта………………………………………….

1.4 Приближенное вычисление корней методами Ньютона и линейной интерполяции ……………………………………………………………………

2 Примеры отделения действительных корней многочленов……………….

Заключение………………………………………………………………………

Список использованных источников…………………………………………….

,**Введение**

**Актуальность.** Данная работа направлена на исследование в области вычисления корней многочленов. Известно множество способов отделения действительных корней многочленов, но данная работа заключается в том, чтобы определить какой из них более удобен в применении. Для этого нужно более глубоко изучить все методы, изучить новые способы отделения действительных корней.

**Цели:** целью курсовой работы является нахождение более удобного и менее громоздкого метода для отделения действительных корней многочленов.

**Задачи:**

1. Изучить основные методы и теоремы отделения действительных корней многочленов.
2. Рассмотреть приближенное вычисление корней методами Ньютона и линейной интерполяции.
3. Выработать общие рекомендации по выбору методов отделения действительных корней многочленов.
4. Найти более удобный, менее громоздкий, способ для решения отделения действительных корней многочленов.

**1.Отделение действительных корней многочленов**

**1.1 Теорема Штурма**

Существует несколько методов для разыскания точного числа корней, причем все они весьма громоздки; среди них более удобным является метод Штурма , который мы сейчас и рассмотрим.

Введем сначала одно определение, которое будет использоваться и далее.

Пусть дана некоторая упорядоченная система действительных чисел, отличных от нуля, например

1,3,-2,1,-4.-8,-3,4,1. (1)

Выпишем последовательно знаки этих чисел:

+,+,-,+,-,-,-,+,+. (2)

Мы видим, что в системе (2) четыре раза стоят рядом противоположные знаки. Ввиду этого говорят, что в упорядоченной системе (1) имеют место четыре перемены знаков. Число перемен знаков можно посчитать, понятно, для любой упорядоченной конечной системы отличных от нуля действительных чисел.

Рассмотрим теперь многочлен с действительными коэффициентами, причем будем предполагать, что многочлен не имеет кратных корней, так как иначе мы могли бы его разделить на наибольший общий делитель с его производной. Конечная упорядоченная система отличных от нуля многочленов с действительными коэффициентами

 (3)

называется системой Штурма для многочлена , если выполняются следующие требования:

* Соседние многочлены системы (3) не имеют общих корней.
* Последний многочлен, , не имеет действительных корней.
* Если действительный корень одного их промежуточных многочленов системы (3), , то и имеют разные знаки.
* Если действительный корень многочлена , то произведение меняет знак с минуса на плюс, когда , возврастая, проходит через точку .

Вопрос о том, всякий ли многочлен обладает системой Штурма, будет рассмотрен ниже; сейчас же предполагая, что такой системой обладает, покажем, как она может быть использована для нахождения числа действительных корней.

Если действительное число не является корнем данного многочлена , а (3)-система Штурма для этого многочлена, то возьмем систему действительных чисел

вычеркнем из нее все числа, равные нулю, и обозначим через число перемен знаков в оставшейся системе; назовем числом перемен знаков в системе Штурма (3) многочлена при .

Справедлива следующая

Теорема Штурма. Если действительные числа , не являются корнями многочлена , не имеющего кратных корней, то и разность равна числу действительных корней многочлена , заключенных между .

Таким образом, для определения числа действительных корней многочлена , заключенных между (- не имеет кратных корней), нужно лишь установить, насколько уменьшается число перемен знаков в системе Штурма этого многочлена при переходе от .

Для доказательства теоремы рассмотрим, как меняется число при возрастании . Пока , возрастая, не встретит корня ни одного многочленов системы Штурма (3), знаки многочленов этой системы не будут меняться, и поэтому число останется без изменения.

Ввиду этого, а также ввиду условия (2) из определения системы Штурма, нам остается рассмотреть два случая: переход через корень одного из промежуточных многочленов и переход через корень самого многочлена

Пусть будет корнем многочлена . Тогда по условию 1), и отличны от нуля. Можно найти, следовательно, такое положительное , быть может и очень малое, что в отрезке многочлены и не имеют корней и поэтому сохраняют постоянные знаки, причем, по условию 3), эти знаки различны. Отсюда следует, что каждая из систем чисел

 (4)

и

 (5)

обладает ровно одной переменой знаков независимо от того, каковы знаки чисел и . Так, например, если многочлен на рассматриваемом отрезке отрицателен, а положителен и если , , то система (4) и (5) соответствуют системы знаков

-, +, +; -, -, +.

Таким образом, при переходе через корень одного из промежуточных многочленов системы Штурма перемены знаков в этой системе могут лишь перемещаться, но не возникают вновь и не исчезают, а поэтому число при таком переходе не меняется.

Пусть, с другой стороны, не будет корнем для . Существует, следовательно, такое положительное число , что отрезок не содержит корней многочлена , а поэтому сохраняет на этом отрезке постоянный знак. Если этот знак положителен, то ввиду условия 4) сам многочлен при переходе через меняет знак с минуса на плюс, т. е. , .

Система чисел

 (6)

Соответствуют, следовательно, системы знаков

-, + и +, +,

т.е. в системе Штурма теряется одна перемена. Если же знак на отрезке отрицателен, то снова, ввиду условия 4), многочлен меняет знак с плюса на минус при переходе через , т.е. , ; системам чисел (6) соответствуют теперь системы знаков

+, -, и -, -,

т.е. в системе Штурма снова теряется одна перемена.

Таким образом, число меняется (при возрастании ) лишь при переходе через корень многочлена , причем в этом случае оно уменьшается ровно на единицу.

Этим доказана, очевидно, теорема Штурма. Для того чтобы воспользоваться ею для разыскания общего числа действительных корней многочлена , достаточно в качестве взять нижний предел отрицательных корней, в качестве верхний предел положительных корней. Проще, однако, поступить следующим образом. Ввиду леммы о корнях многочлена, существует такое положительное число , быть может и очень большое, что при знаки всех многочленов системы Штурма будут совпадать со знаками их старших членов. Иными словами, существует столь большое положительное значение неизвестного , что знаки соответствующих ему значений всех многочленов системы Штурма совпадают со знаками их старших коэффициентов; это значение , вычислять которое нет необходимости, условно обозначается символом ∞. Существует, с другой стороны, столь большое по абсолютной величине отрицательное значение , что знаки соответствующих ему значений многочленов четной степени и противоположны знакам старших коэффициентов для многочленов нечетной степени; это значение условимся обозначать через -∞. В отрезке (-∞;∞) содержатся, очевидно, все действительные корни всех многочленов системы Штурма и, в частности, все действительные корни многочлена . Применяя к этому отрезку теорему Штурма, мы найдем число этих корней, применение же теоремы Штурма к отрезкам (-∞;0) и (0;∞) дает соответственно число отрицательных и число положительных корней многочлена .

Нам остается показать, что всякий многочлен с действительными коэффициентами, не имеющий кратных корней, обладает системой Штурма. Из различных методов, используемых для построения такой системы, мы изложим один, наиболее употребительный. Положим =, чем обеспечивается выполнение условия 4) из определения системы Штурма. Действительно, если действительный корень многочлена , то . Если , то в окрестности точки , а поэтому меняет знак с минуса на плюс при переходе ; это же верно тогда и для произведения . Аналогичные рассуждения проходят и в случае . Делим затем на и остаток от этого деления, взятый с обратным знаком, принимаем за :

*.*

Вообще, если многочлены уже найдены, то будет остатком от деления на , взятым с обратным знаком:

. (7)

Изложенный здесь метод отличается от алгоритма Евклида, примененного к многочленам и , лишь тем, что у остатка каждый раз меняется знак на обратный и следующее деление производится уже на этот остаток с обратным знаком. Так как при разыскании наибольшего общего делителя такая перемена знаков не существенна, то наш процесс остановится на некотором , являющемся наибольшим общим делителем многочленов и , причем из отсутствия у кратных корней, т.е. из его взаимной простоты , будет следовать, что на самом деле является некоторым отличным от нуля действительным числом.

Отсюда вытекает, что построенная нами система многочленов

удовлетворяет и условию 2) из определения системы Штурма. Для доказательства выполнения условия 1) предположим, что соседние многочлены обладают общим корнем . Переходя к равенству

,

мы получим, что служит корнем и для . Продолжая далее, мы получим, что служит общим корнем для и , что противоречит, однако, нашим предположениям. Наконец, выполнение условия 3) вытекает непосредственно из неравенства (7): если .

Пример 1: Применим метод Штурма к многочлену

Мы не будем при этом предварительно проверять, что не имеет кратных корней, так как метод построения системы Штурма, изложенный выше, одновременно служит для проверки взаимной простоты многочлена и его производной.

Найдем систему Штурма для , применяя указанный метод. При этом в процессе деления будем, в отличии от алгоритма Евклида, умножать и сокращать лишь на произвольные положительные числа, так как знаки остатков играют в методе Штурма основную роль. Получаем такую систему:

Определим знаки многочленов этой системы при , для чего, как было указанно, следует смотреть лишь на знаки старших коэффициентов и на степени этих многочленов. Мы получим такую таблицу:

 Таблица знаков многочленов Таблица 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  | Число перемен знаков |
| -∞ | - | + | - | - | + | - | 4 |
| ∞ | + | + | + | - | - | - | 1 |

Таким образом, при переходе от -∞ к ∞ система Штурма теряет три перемены знаков, а поэтому многочлен имеет ровно три действительных корня.

Пример 2. Применим метод Штурма к более простому многочлену.

Найдем число его действительных корней, а также целые границы, между которыми каждый из этих корней расположен.

Система Штурма для многочлена будет:

Найдем число перемен знаков в этой системе при ,

 Таблица знаков переменных Таблица 2.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | Число перемен знаков |
| -∞ | - | + | - | + | 3 |
| ∞ | + | + | + | + | 0 |

Многочлен обладает, следовательно, тремя действительными корнями. Для более точного определения положения этих корней продолжим предыдущую таблицу:

 Таблица знаков переменных Таблица 3.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | Число перемен знаков |
| -3 | - | + | - | + | 3 |
| -2 | + | 0 | - | + | 2 |
| -1 | + | - | - | + | 2 |
| 0 | - | 0 | + | + | 1 |
| 1 | + | + | + | + | 0 |

Таким образом, система Штурма многочлена теряет по одной перемене знаков при переходе от -3 к -2, от -1 к 0 и от 0 к 1. Корни этого многочлена удовлетворяют, следовательно, неравенствам:

**1.2 Другие теоремы о числе действительных корней**

Теорема Штурма полностью решает вопрос о числе действи­тельных корней многочлена. Ее существенным недостатком является, однако, громоздкость вычислений, выполняемых при построении системы Штурма. Ввиду этого будут доказаны две теоремы, не дающие точ­ного числа действительных корней, а лишь ограничивающие это число сверху. Эти теоремы, применяемые после того, как при помощи графика число действительных корней уже ограничено снизу, позволяют иногда найти точное число действительных кор­ней, не прибегая к методу Штурма.

Пусть дан многочлен -й степени с действительными коэф­фициентами, причем допускаем, что он может обладать кратными корнями. Рассмотрим систему его последовательных производных

(x) =(x), *f* '(x), (х), . . ., (x), (x), (8)

из которых последняя равна старшему коэффициенту многочлена , умноженному на и поэтому все время сохраняет постоян­ный знак. Если действительное число не служит корнем ни одного из многочленов системы (8), то обозначим через число перемен знаков в упорядоченной системе чисел

Таким образом можно рассматривать целочисленную функцию , определенную для тех значений , которые не обращают в нуль ни одного из многочленов системы (8).

Посмотрим, как меняется число при возрастании . Пока не пройдет через корень ни одного из многочленов (8), число не может измениться. Ввиду этого мы должны рассмотреть два случая: переход через корень многочлена и переход *х* через корень одной из производных, .

Пусть *а* будет -кратный корень многочлена , т.е.

*f* (а) = *f* ' (a)=... = (а) =0,

Пусть положительное число столь мало, что отрезок не содержит корней многочленов отлич­ных от , а также не содержит ни одного корня многочлена . Докажем, что в системе чисел

всякие два соседних числа имеют противоположные знаки, тогда как все числа

имеют один и тот же знак. Так как каждый из многочленов си­стемы (8) является производной от предыдущего многочлена, то нам нужно лишь доказать, что если *х* проходит через корень много­члена то, независимо от кратности этого корня, до перехода и имели разные знаки, а после перехода их знаки сов­падают. Если , то убывает на отрезке, а потому если же, то возрастает, и потому . В обоих случаях, следовательно, знаки раз­личны. С другой стороны, если , то возрастает на отрезке , а потому ; аналогично из следует . Таким образом, после перехода через корень *а* знаки и должны совпадать.

Из доказанного следует, что при переходе *х* через -кратный корень многочлена система

теряет *l* перемен знаков.

Пусть будет теперь корнем производных

но не служит корнем ни для , ни для . По дока­занному выше, переход через влечет за собой потерю в системе

 , , …, ,

перемен знаков. Правда, этот переход создает, возможно, новую перемену знаков между (x) и , однако, ввиду , при переходе через число перемен знаков в системе

, , , ...,

или не меняется, или же уменьшается. Оно может уменьшиться при этом лишь на четное число, так как многочлены (х) и не меняют своих знаков при переходе через значение .

Из полученных результатов вытекает, что если числа , не являются корнями ни для одного из многочленов си­стемы (8), то число действительных корней многочлена , заключенных между и подсчитываемых каждый столько раз, какова его кратность, равно разности или меньше этой разности на четное число.

Для того чтобы ослабить ограничения, наложенные на числа, введем следующие обозначения. Пусть действительное число не является корнем многочлена , хотя, быть может, служит корнем для некоторых других многочленов системы (1). Обозначим через число перемен знаков в системе чисел

, ..., , ,     (9)

подсчитываемое следующим образом: если

 ... ,          (10)

но

 ≠ 0, ≠ 0,          (11)

то считаем , , ..., имеющими такой же знак, как у ; это равносильно, очевидно, тому, что при подсчете числа перемен знаков в системе (9) нули предполагаются вычеркнутыми. С другой стороны, через обозначим число перемен знаков в системе (9), подсчитываемое следующим образом: если имеют место условия (10) и (11), то считаем, что , , имеет такой же знак, как и , если разность четная, и противоположный знак, если эта разность нечетная.

Теперь определяем число действительных корней многочлена заключенных между, причем не являются корнями но служат, быть может, корнями для других многочленов системы (8). Пусть столь мало, что отрезок не содержит корней много­члена а также отличных от корней всех остальных много­членов системы (8); с другой стороны, пусть столь мало, что отрезок ) также не содержит корней и отличных от корней остальных многочленов системы (8). Тогда интересующее нас число действительных корней многочлена будет равно числу действительных корней этого многочлена, заключенных между , т.e. по доказанному выше, равно разности или меньше этой разности на четное число.

**1.3 Теорема Бюдана Фурье и Декарта**

Теорема Бюдана-Фурье. Если действительные числа , не являются корнями многочлена c действитель­ными коэффициентами, то число действительных корней этого многочлена, заключенных между и подсчитываемых ка­ждый столько раз, какова его кратность, равно разности или меньше этой разности на четное число.

Обозначим символом ∞ столь большое положительное значение неизвестного , что знаки соответствующих ему значений всех много­членов системы (x) =(x), *f* '(x), (х), . . ., (x), (x) совпадают со знаками их старших коэффициен­тов. Так как этими коэффициентами будут последовательно числа , , …, , знаки которых совпадают, то . С другой стороны, так как

где , , ..., — коэффициенты многочлена то со­впадает с числом перемен знаков в системе коэффициентов много­члена причем коэффициенты, равные нулю, не учитываются. Таким образом, применяя теорему Бюдана—Фурье к отрезку (0, ∞), мы приходим к следующей теореме:

Теорема Декарта. Число положительных корней много­члена засчитываемых каждый столько раз, какова его кратность, равно числу перемен знаков в системе коэффициен­тов этого многочлена (причем равные нулю коэффициенты не учитываются) или меньше этого числа на четное число.

 Для определения числа отрицательных корней многочлена  достаточно, очевидно, применить теорему Декарта к многочлену При этом, если ни один из коэффициентов многочлена не равен нулю, то, очевидно, переменам знаков в системе коэффи­циентов многочлена соответствуют сохранения знаков в системе коэффициентов многочлена и обратно. Таким образом, если многочленне имеет равных нулю коэффициентов, то число его отрицательных корней (считаемых с их кратностями) равно числу сохранений знаков в системе коэффициентов или меньше его на четное число.

Пример 3: рассмотрим многочлен применяя теоремы Декарта и Бюдана-Фурье.

Число перемен знаков в системе коэффициентов равно трем, и поэтому, по теореме Декарта, может иметь три или один положительный корень. С другой стороны, не имеет равных нулю коэффициентов, а так как в системе коэффициентов два сохранения знаков, то либо имеет два отрицательных корня, либо не имеет ни одного. Следует, что два есть точное число отрицательных корней многочлена.

 Число перемен знаков Таблица 4.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  Число перемен знаков |
|  |  - |  + |  + |  + |  + |  + |  1 |
|  |  + |  +  |  + |  + |  + |  + |  0 |

Отсюда следует, что система производных теряет при переходе от 1 до ∞ одну перемену знаков, а поэтому имеет ровно один положительный корень.

**1.4 Приближенное вычисление корней методами Ньютона и линейной интерполяции**

После того как методом Штурмана (или каким-либо другим, более экономичным способом) было установлено, что между рациональными числами содержится лишь один корень многочлена , остается задача настолько сузить эти границы, чтобы новые границы обладали наперед заданным числом совпадающих первых десятичных знаков; этим искомый корень будет вычислен с заданной точностью.

Существует много методов, позволяющих достаточно быстро находить приближенное значение корня с требуемой точностью. Укажем два из них, теоретически более простые и общие и при совместном употреблении достаточно быстро приводящие к цели.

Будем считать, что есть простой корень многочлена , так как от кратных корней всегда можем освободиться, и что корень уже отделен границами отсюда следует, в частности, что имеют разные знаки.

Метод линейной интерполяции. В качестве приближенного значения корня можно принять полусумму границ , т.е. середину отрезка, имеющего концы . Более естественно предположить, что корень лежит ближе к той из границ , которой соответствует меньшее по абсолютной величине значение многочлена. Метод линейной интерполяции состоит в том, что в качестве приближенного значения корня , делящее отрезок на части, пропорциональные абсолютным величинам чисел , т.е.

знак минус в правой части поставлен ввиду того, что имеют разные знаки. Отсюда

 (12)

Геометрически, как на рис.1, метод интерполяции заключается в том, что на отрезке кривая заменяется ее хордой, соединяющей точки , и в качестве приближенного значения корня принимается абсциса точки пересечения этой хорды с осью .

*y*

 *A*

 *f(a)*

 *ab*

0 *a c f(b) x*

 Рис.1 Геометрический метод интерполяции

Метод Ньютона. Так как простой корень многочлена , то . Принимаем, что также , так как иначе вопрос сведется к вычислению корня многочлена , имеющего меньшую степень, чем . Причем, далее, что отрезок не только не содержит корней , отличных от , но и не содержит ни одного корня многочлена , а также и многочлена (x. Таким образом, кривая на отрезке либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает, а также либо во всех точках этого отрезка обращена выпуклостью вверх, либо во всех точках обращена выпуклостью вниз. В расположении кривой на отрезке могут встретиться, следовательно, четыре случая.

Обозначим через тот из пределов , в котором знак совподает со знаком . Так как имеют разные знаки, а сохраняет знак на своем отрезке , то такое может быть указано. В случаях, представленных на рис. 2-5.

 0

 Рис. 2 Пределы совпадения знаков

*y*

 *B*

 *a*

 0 *d b* *x*

 Рис. 3 Пределы совпадения знаков

 *y*

 *A*

 0 *d b x*

 Рис. 4 Пределы совпадения знаков

будет , в двух других случаях . В точке кривой с абсциссой , т.е. в точке с координатами , проведем касательную к этой кривой и обозначим через абсциссу точки пересечения этой касательной с осью . Рис. 2-5 показывают, что число можно считать приближенные значения корня .

 *y*

 *A*

 *b*

 *a d* *x*

 *B*

 Рис.5 Пределы совпадения знаков

Метод Ньютона состоит, следовательно в замене кривой на отрезке ее касательной в одной из границ этого отрезка. Условие, наложенное на выбор точки , очень существенно: рис. показывает, что без соблюдения этого условия точка пересечения касательной с осью может вовсе не давать приближения к искомому корню.

Выведем формулу, по которой разыскивается число . Как известно, уравнение касательной к кривой в точке может быть записано в виде

Подставляя сюда координаты точки пересечения касательной с осью , получим:

откуда

Если соединить на рис. точки хордами, то обнаружим, что методы линейной интерполяции и Ньютона

 *y*

 *A*

 *b d*

1. *a x*

 Рис.6 Наложенное условие

во всех случаях дают приближение к истинному значению корня с разных сторон. Если они не дают точного приближения, то к этим пределам следует еще раз применить указанные оба метода (рис. 7) и т.д.. Действительно этот процесс позволяет вычислить корень с любой точностью.

  *y*

 *A*

 *c b*

 0 *a* *d* *x*

 *B*

Рис.7 Приближение к истинному значению корня

**2. Примеры отделения действительных корней многочленов**

1. Определить число положительных и отрицательных корней, а также их границы для уравнения

В данной задаче  . Уравнение имеет пять корней. Поскольку , то по следствию из теоремы, уравнение имеет по крайней мере один действительный корень. Так как

то

,

 т.е. все корни лежат внутри данного кольца. Это означает, что положительные корни удовлетворяют неравенству , а отрицательные — неравенству .

Найдем верхнюю границу положительных корней. Так как  — первый отрицательный коэффициент в последовательности  то , а  - наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов. Следовательно,

.

Найдем нижнюю границу положительных корней. Составим уравнение:  (старший коэффициент должен быть положительным). Для этого уравнения,поэтому

.

Отсюда

Уточним границы отрицательных корней. Составим уравнение:

Для этого уравнения , поэтому

 .

Составим уравнение:

Для этого уравнения ,поэтому

.

Отсюда находим:

.

Исследуем структуру корней уравнения. Так как квадрат каждого не крайнего коэффициента больше произведения двух его соседних коэффициентов, то по теореме, необходимое условие действительности всех корней уравнения выполняется.

Определим число положительных и отрицательных корней. Выписываем коэффициенты многочлена

.

так как число перемен знака , то число положительных корней равно трем или меньше на четное число, т.е. равно 1. Далее выписываем коэффициенты многочлена

.

Так как число перемен знаков , то число отрицательных корней равно двум или меньше на четное число, т.е. их вообще нет.

2. Отделить корни кубического уравнения:

Уравнение имеет три корня, среди которых по крайней мере один действительный (это уравнение нечетной степени). Оценим модули корней уравнения. Так как

Отсюда

Определим число положительных и отрицательных корней. Выписываем коэффициенты многочлена

так как число перемен знака   (нулевой коэффициент не учитывается), то число положительных корней равно двум или меньше на четное число, т.е. они отсутствуют. Далее выписываем коэффициенты многочлена

так как число перемен знака   (нулевой коэффициент не учитывается), то число отрицательных корней равно единице.

Отделим корни. Для этого преобразуем уравнение к равносильному виду  и найдем точки пересечения графиков  (рис.1)



Очевидно, корень уравнения

3.  Отделить корни уравнения третьего порядка

Согласно теореме уравнение имеет три корня, среди которых по крайней мере один действительный. Оценим модули корней уравнения :

Так как

 то

 Отсюда

Определим число положительных и отрицательных корней. Выписываем коэффициенты многочлена

.

так как число перемен знака , то уравнение имеет два положительных корня или ни одного. Далее выписываем коэффициенты многочлена

так как число перемен знака , то имеется один отрицательный корень. Отделим корни третьим способом. С этой целью преобразуем уравнение к равносильному виду:

.

Найдем абсциссы точек пересечения графиков  (см. рис. 2, там указаны два из трех полученных промежутков).



Результат отделения корней — три промежутка. Заметим, что отрезки могут быть сужены, например, вместо отрезка  можно принять .

**Заключение**

В курсовой работе рассмотрена теория о отделении действительных корней многочленов. Приведены задачи, в которых были использованы различные методы для отделения корней многочленов.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованной литературы.

В первой главе рассматриваются теоремы и методы отделения действительных корней многочленов: теорема Штурма, теорема Бюдана-Фурье и Декарта, метод Ньютона и линейной интерполяции и другие теоремы о числе действительных многочленов.

Во второй главе представлено решение различных корней многочленов. При выполнении курсовой работы использовалась литература, список которой заключает представленную работу.

В заключении, хотелось бы отметить метод Ньютона и линейной интерполяции. Из всех рассмотренных теорем и методов он более прост в применении и так же точен как и метод Штурма.

**Список использованных источников**

1. <http://ru.wikipedia.org/wiki>.
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: Учебник для вузов. — 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры-СПб: 13-е изд. - Лань, 2003
4. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре - СПб
5. Окунев Л.Я. Высшая алгебра: изд. 54- Просвещение, 1937
6. Смолин Ю.Н. Алгебра и теория чисел – 4-е изд. – Наука, 2012