

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Якутская государственная сельскохозяйственная академия»  
Экономический факультет  
Кафедра «Математика и бизнес-информатика»  
Заочное обучение

## Методические указания и контрольные задания

Дисциплина: Методы оптимальных решений

Направление 080100. Экономика

Якутск – 2014 г.

**УДК: 519.8:33(075.8)**

**ББК: 22.18я73**

**Г58**

Разработчик - к.п.н., доцент кафедры «Математика и бизнес-информатика» экономического факультета Гоголева И.В.

Обсуждено кафедрой «Математика и бизнес-информатика» экономического факультета, протокол заседания кафедры № 4 от «4» февраля 2014 г.

Утверждено методической комиссией экономического факультета, протокол заседания методической комиссии факультета № 5 от «14» февраля 2014 г.

## 1. Цели и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины Б.2.Б.4. «Методы оптимальных решений» - подготовка бакалавров направления 080100.62 «Экономика» путем формирования у студентов комплекс общематематических знаний, умений и навыков, необходимых для изучения общепрофессиональных дисциплин, а также для решения общепрофессиональных задач.

Исходя из цели, в процессе изучения учебной дисциплины решаются следующие задачи:

- сформировать основные понятия математической теории оптимизации;
- ознакомить с основными методами и моделями оптимизации, необходимых для решения задач математического программирования;
- выработать у студентов умение самостоятельно изучать математическую, учебную и научную литературу; навыки математического исследования прикладных вопросов и математического моделирования;
- сформировать и развить компетенции, перечисленные далее.

Учебная дисциплина Б.2.Б.4. «Методы оптимальных решений» входит в цикл общематематических и естественнонаучных дисциплин.

Требования к входным знаниям, умениям и навыкам обучающихся:

- знать основные понятия элементарной математики, фундаментальных разделов курса высшей математики;
- уметь рассчитывать, определять, находить, вычислять, решать, оценивать, используя математические методы, алгоритмы, приемы, правила;
- владеть навыками работы с компьютером как средством управления информацией и математической обработки данных; ставить задачи, выдвигать гипотезы, описывать результаты, формулировать выводы.

Дисциплина Б.2.Б.4. «Методы оптимальных решений» является предшествующей для следующих учебных дисциплин: Б.2.Б.2. «Линейная алгебра», Б.2.Б.1. «Математический анализ», Б.2.Б.3. «Теория вероятностей и математическая статистика», Б.3.Б.2. «Микроэкономика», Б.3.Б.1. «Макроэкономика».

Знания, умения, навыки, получаемые студентами в результате изучения дисциплины, необходимы для изучения дисциплин: Б.3.Б.3. «Эконометрика», Б.3.Б.4. «Статистика», Б.2.В.ОД.3. Информационные системы в экономике», Б.3,В.ОД.13 «Комплексный экономический анализ».

В результате освоения дисциплины студент должен обладать следующими компетенциями:

### **общекультурными (ОК):**

- владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК–1).

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих профессиональных компетенций:

- способен собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-1);
- способен на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов, (ПК-2);

- способен выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами (ПК-3);
- способен осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК-4);
- способен выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5);
- способен на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-6);
- способен использовать для решения аналитических и исследовательских задач современные технические средства и информационные технологии (ПК-10);
- способен преподавать экономические дисциплины в образовательных учреждениях различного уровня, используя существующие программы и учебно-методические материалы (ПК-14);
- способен принять участие в совершенствовании и разработке учебно-методического обеспечения экономических дисциплин (ПК-15).

В результате освоения дисциплины студент должен обладать следующими компетенциями:

### **1) общенаучными компетенциями (ОНК):**

- способность использовать в познавательной профессиональной деятельности базовые значения в области математики (ОНК-1);
- способность приобретать новые математические знания, используя современные образовательные и информационные технологии (ОНК-2);
- владеть математической логикой, необходимой для формирования суждений по соответствующим профессиональным, социальным, научным и этическим проблемам (ОНК-3);

### **2) инструментальными компетенциями (ИК):**

- владеть развитыми навыками и готовностью к продолжению образования (ИК-1);
- обладать способностью к применению на практике, в том числе умением составлять математические модели типовых профессиональных задач и находить способы их решений; интерпретировать профессиональный смысл полученного математического результата (ИК-2);
- владеть умением применять аналитические и численные методы решения поставленных задач (с использованием программных средств (ИК-3);

### **3) социально-личностными и общекультурными компетенциями (СЛК):**

- обладать математическим мышлением, математической культурой как частью профессиональной и общечеловеческой культуры (СЛК-1);
- владеть способами доказательств утверждений и теорем как основной составляющей когнитивной и коммуникативной функций (СЛК-2);
- обладать способностью к критике и самокритике, умением работать в команде, приверженностью к этическим ценностям, толерантностью к различным культурам (СЛК-3).

В части **предметно-социальных компетенций** бакалавр должен:

- демонстрировать глубокое знание основных разделов элементарной математики;

- иметь глубокие знания базовых математических дисциплин и проявлять высокую степень их понимания, знать и уметь использовать на соответствующем уровне (базовом, повышенном, продвинутом):
- демонстрировать понимание основных теорем из различных математических курсов и умение их доказывать;
- уметь проводить доказательства математических утверждений, не аналогичных ранее изученным, но тесно примыкающих к ним;
- уметь решать математические задачи и проблемы, аналогичные ранее изученным, но более высокого уровня сложности;
- уметь решать математические задачи и проблемы из различных областей математики, которые требуют некоторой оригинальности мышления; обладать способностью понимать математические проблемы и выявлять их сущность;
- уметь переводить на математический язык простейшие проблемы, поставленные в терминах других предметных областей, и использовать преимущества этой переформулировки для их решения;
- уметь формулировать на математическом языке проблемы среднего уровня сложности, поставленные в нематематических терминах, и использовать преимущества этой переформулировки для их решения;
- знать некоторые языки программирования или программное обеспечение и уметь применять их для решения математических задач и получения дополнительной информации;
- демонстрировать способность к абстракции, в том числе умение логически развивать отдельные формальные теории и устанавливать связь между ними;
- обладать умением читать и анализировать учебную и научную математическую литературу, в том числе и на иностранном языке;
- уметь представлять математические утверждения и их доказательства, проблемы и их решения ясно и точно в терминах, понятных для профессиональной аудитории, как в письменной, так и устной форме.

В результате изучения дисциплины Б.2.Б.4. «Методы оптимальных решений» студент должен:

**знать:** основные принципы и математические методы анализа решений;

**уметь:** выбирать рациональные варианты действий в практических задачах принятия решений с использованием экономико-математических моделей;

**владеть:** иметь представление о проблематике и перспективах развития теории принятия решений как одного из важнейших направлений, связанных с созданием и внедрением новых информационных технологий.

## **2. Содержание разделов дисциплины**

### **Раздел 1. Основы математической теории оптимизации.**

Введение в э/м методы. Классификация задач математического программирования (ЗМП). Задача линейного программирования. Целочисленные ЗЛП. Транспортная задача. Теория двойственности в анализе оптимальных решений экономических задач. Некоторые методы решения нелинейного программирования.

### **Раздел 2. Основы теории оптимального управления.**

Задачи динамического программирования. Модели управления запасами.

### **Раздел 3. Основы сетевого планирования.**

Основы математической теории графов. Метод сетевого программирования.

### **Раздел 4. Основы математической теории игры.**

Матричные игры, кооперативные игры. Игры с природой.

### **Раздел 5. Введение в теорию массового обслуживания.**

СМО с отказами. СМО с неограниченным ожиданием. СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди.

### **Раздел 6. Модели потребления.**

Пространства товаров, цены, бюджетное множество, функция полезности. Постановка задачи оптимизации выбора потребителя (функции спроса, уравнение Слуцкого, коэффициенты эластичности).

### **Раздел 7. Модели производства.**

Производственные функции. Теория фирмы. Модели поведения фирмы в условиях совершенной и несовершенной конкуренции. Модели сотрудничества и конкуренции. Спрос и предложение. Паутинообразная модель рынка.

### **Раздел 8. Глобальные модели производства и потребления.**

Модель межотраслевого баланса. Модель Леонтьева. Модель Неймана. Модель Эванса. Модель Солоу.

### **3. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины «Методы оптимальных решений»**

1. Малыхин, В.И. Математическое моделирование экономики: учебное пособие. - М., 2008.
2. Ларичев, О.И. Теория и методы принятия решений / О.И. Ларичев. М.: Логос, 2000.
3. Красс, М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебное пособие / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - М.: Дело, 2008.
4. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебное пособие / под ред. Н.Ш. Кремер. - М., 2007.
5. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / под ред. В.И. Ермакова. – М., 2006.
6. Практикум по высшей математике для экономистов / под ред. Н.Ш. Кремер. - М.ЮНИТИ -ДАНА, 2009.
7. Общий курс высшей математики для экономистов: учебное пособие / под ред. В.И. Ермакова. - М., 2004.
8. Малыхин, В.И. Математика в экономике: Учебное пособие. - М., 1999.
9. Справочник по математике для экономистов / под ред. В.И. Ермакова. - М.: Высшая школа, 2009.
10. Малыхин, В.И. Математическое моделирование экономики: учебное пособие. - М., 1998.
11. Гатаулин, А.М. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / под ред. А.М. Гатаулина. - М., 1990.
12. Немчинов, В.С. Экономико-математические методы и модели / В.С. Немчинов. - М.: Наука, 1967.
13. Браславец, М.Е. Мат. моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / М.Е. Браславец и др. - М., 1972
14. Лебедев, В.В. Математические моделирование социально-экономических процессов. - М.: Изограф. - 1997.
15. Гоголева, И.В. Методические указания и контрольные задания по курсу математики (экономико-математические методы). Часть 4. – Якутск: ЯГСХА, 2003.
16. Гоголева, И.В. Методические указания и контрольные задания по курсу математики (экономико-математические модели). Часть 5. – Якутск: ЯГСХА, 2003.

#### 4. Контрольные задания

**Задание 1.1.** Торговая фирма для продажи товаров трех видов использует ресурсы: время и площадь торговых залов. Затраты ресурсов на продажу одной партии товаров каждого вида даны в таблице. Прибыль, получаемая от реализации одной партии товаров 1-го вида –  $n$  у.е., 2-го вида –  $n + 3$  у.е., 3-го вида –  $n + 16$  у.е. Определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую фирме максимальную прибыль.

Ресурсы	Вид товара			Объем ресурсов
	1	2	3	
Время, чел.-ч	0,5	0,7	0,6	$300n$
Площадь, кв.м.	0,1	0,3	0,2	$90n$

**Задание 1.2.** Составить математическую модель двойственной задачи и по решению исходной найти оптимальное решение двойственной:

$$Z(X) = 2x_1 + nx_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} nx_1 + 2x_2 - x_4 \leq n + 7 \\ x_1 - x_2 + nx_3 + 3x_4 \leq n \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

**Задание 1.3.** Фирма выпускает три вида изделий, располагая при этом сырьем 4 типов, соответственно в количествах 14, 12, 8 и 6 т. Нормы затрат каждого типа сырья на единицу изделия первого вида составляют соответственно 1,2,1,0, второго – 2,1,1,1, третьего – 1,1,0,1. Прибыль от реализации единицы изделия первого вида равна 4 у.е., второго – 5 у.е., третьего – 3 у.е. Требуется: составить план производства трех видов, максимизирующих прибыль; определить дефицитность сырья.

**Задание 1.4.** Необходимо доставить груз от трех поставщиков  $A = (a_i)$ , ( $i = 1,2,3$ ) четырем потребителям  $B = (b_j)$ , ( $j = 1,2,3,4$ ). Известна матрица затрат на доставку единицы груза от каждого поставщика потребителю (в условных единицах), мощности поставщиков  $a_i$ , спрос потребителей в грузах  $b_j$  (данные в таблице). Чтобы получить таблицу транспортных расходов подставьте номер  $n$  по списку.

$b_j \backslash a_i$	25	30	40	45
60	$2 + 2n$	$18 + n$	$30 - n$	$2 + 3n$
35	$16 + n$	$22 - 2n$	$7 + 2n$	$46 - 2n$
35	$35 - n$	$29 - n$	$10 + n$	$4 + 3n$

Требуется: а) составить экономико-математическую модель данной ситуации; б) найти оптимальный план перевозок и указать минимальные затраты.

Примечание: если в таблице получаются отрицательные значения, то нужно взять их по абсолютной величине.

**Задание 2.1.** В таблице указан возможный прирост выпуска продукции четырьмя плодово-консервными заводами области в млн.р. при осуществлении инвестиций на их модернизацию с дискретностью  $50n$  млн.р., причем на один завод можно осуществить только одну инвестицию. Составить план распределения инвестиций между заводами области, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

Инвестиции, млн.р.	Прирост выпуска продукции, млн.р.			
	Заводы			
	1	2	3	4
$50n$	$25 + n$	$30 + n$	$36 + n$	$28 + n$
$100n$	$34 + n$	$70 + n$	$64 + n$	$52 + n$
$150n$	$14 + n$	$75 + n$	$44 + n$	$61 + n$
$200n$	$10 + n$	$12 + n$	$24 + n$	$56 + n$

**Задание 2.2.** Выработать оптимальную стратегию управления запасами, если общий спрос на продукцию составляет  $D = 360(n + 1)$ , стоимость хранения  $C_h = 100 + 10n$ , а стоимость хранения  $C_0 = 40 + n$ . Представить эту стратегию графически и рассчитать другие характеристики стратегии в соответствии с примером, рассмотренным в методическом указании [16]. Подставьте свой номер  $n$ .

**Задание 2.3.** Определить оптимальный размер заказа в условиях, что средняя интенсивность расхода товара  $DR = 2n + 3$  штук в день, средняя интенсивность пополнения  $IR = 4n + 6$  штук в день. Причем  $C_h = 45, C_0 = 35, D = 300(2n + 3)$ .

**Задание 2.4.** Определить оптимальную стратегию управления запасами в условиях пополнения запасов в результате производства продукции, если средний спрос на изделие  $DR = 2n + 30$  в день, интенсивность производства  $PR = 4n + 100$ , причем  $C_h = \frac{n}{100}, C_s = 20n + 120$ . Представьте эту стратегию графически и рассчитать другие характеристики системы.

**Задание 3.1.** Задача. По следующим данным построить сеть, определить ее временные характеристики работ и событий, критический путь и его длину. В условии задачи подставьте свой номер  $n$ .

Работа	1 -2	2 -3	2 - 5	3 - 4	3 -6	4 - 6
Длительность	$10 + n$	$6 + n$	$6 + 2n$	$9 + n$	$2 + 4n$	$8 + n$

**Задание 4.** Розничное торговое предприятие разработало несколько вариантов плана продаж товаров на предстоящей ярмарке с учетом конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели прибыли представлены в таблице. Определить: оптимальный план продажи товаров и цену игры; какой стратегии следует придерживаться торговому предприятию, если наиболее вероятной является ситуация:  $C_1 - 30\%, C_2 - 30\%, C_3 - 40\%$ .

План продажи	Величина прибыли в зависимости от спроса, млн.р.		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$P_1$	$2 + n$	$1 + n$	$3 + n$
$P_2$	$1 + n$	$2 + n$	$3 + n$
$P_3$	$2 + n$	$3 + n$	$1 + n$

**Задание 5.1.** В ОТК цеха работают 3 контролера. Если деталь поступает в ОТК, когда все контролеры заняты обслуживанием ранее поступивших деталей, поступающих в ОТК в течение часа, равно  $20 + n$ , среднее время, которое затрачивает 1 контролер на обслуживание одной детали, равно 15 минут. Определить вероятность того, что деталь пройдет ОТК необслуженной, насколько загружены контролеры и сколько их необходимо поставить, чтобы  $P_{\text{обс}}^* \geq 0,95$ .

**Задание 5.2.** Сберкасса имеет  $n$  контролеров-кассиров для обслуживания вкладчиков. Поток вкладчиков поступает в сберкассу с интенсивностью  $\lambda = 30$  чел./ч. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного вкладчика  $t_{\text{обс}} = n + 2$  минут. Определить характеристики сберкассы как объекта СМО.

**Задание 5.3.** Магазин получает ранние овощи из пригородных теплиц. Автомобили с грузом прибывают в разное время с интенсивностью  $\lambda = n + 4$ , (где  $n$  – номер варианта) в день. Подсобные помещения и оборудование для подготовки овощей к продаже позволяют обрабатывать и хранить товар, привезенный 3-мя автомашинами ( $m = 3$ ). В магазине работают 3 фасовщика ( $n = 3$ ), каждый из которых в среднем может обрабатывать товар с одной машины в течение  $t_{\text{ср.обс}} = 3$  часа. Продолжительность рабочего дня при сменной работе составляет 12 ч.

Определить, какова должна быть емкость подсобных помещений, чтобы вероятность полной обработки товаров была  $P_{\text{обс}}^* \geq 0,97$ .

**Задание 7.** Даны зависимости спроса  $D(p) = 90n - 5p$  и предложения  $S(p) = 4n + 10p$  от цены  $p$ . Найдите равновесную цену, выручку при равновесной цене. Найдите цену, при которой выручка максимальна и саму эту максимальную выручку.

**Задание 8.1.** Предприятие состоит из двух основных цехов и одного вспомогательного, каждый из которых выпускает один вид продукции. В таблице указаны расходные коэффициенты  $a_{ij}$  продукции  $i$ -го цеха, используемой как «сырье» (промежуточный продукт) для выпуска единицы продукции  $j$ -го цеха, а также количество единиц продукции  $i$ -го цеха, предназначенной для реализации

(конечный продукт). Требуется определить: коэффициенты полных затрат; коэффициенты косвенных затрат; валовый выпуск (план) для каждого цеха; производственную программу цехов.

Цех	Прямые затраты			Конечный продукт
	1	2	3	
1	$0,003n$	$0,002n$	$0,1$	$200n$
2	$0,002n$	$0,004n$	$0,001n$	$150n$
3	$0,1$	$0,001n$	$0,002n$	$300n$

**Задание 8.2.** Даны матрицы  $A, B$  технологических процессов, вектор  $P$  цен и вектор  $S$  начальных запасов:

$$A = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ 2n & 2n-1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} n+1 & n \\ 2n & 3n \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} 3n+2 \\ 3n+4 \end{pmatrix}; P = (n \quad n-2).$$

Найдите интенсивности  $z_1, z_2$ , максимизирующие стоимость выпуска продукции за один производственный цикл и эту максимальную стоимость.

**Задание 8.3.** В модели Солоу с производственной функцией Кобба – Дугласа  $Y = AK^\alpha L^\beta$ , где  $K$  – объем фондов либо в стоимостном выражении, либо в натуральном количестве – число рабочих, число человеко-дней и т.п;  $L$  – объем трудовых ресурсов, также либо в стоимостном выражении, либо в натуральном количестве – число рабочих, число человеко-дней и т.п;  $Y$  – выпуск продукции в стоимостном или натуральном выражении. Пусть  $A = 10^n$ ;  $\alpha = 0,005n$ ;  $\beta = 1 - \alpha$ . Найдите значения фондовооруженности, производительности труда и удельного потребления на стационарной траектории, на которой норма накопления равна  $0,2$ , выбытие фондов  $0,002n$  за год, а годовой прирост трудовых ресурсов  $0,005n$ .