

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Якутская государственная сельскохозяйственная академия»
Экономический факультет
Кафедра «Математика и бизнес-информатика»
Заочное обучение

Методические указания и контрольные задания

Дисциплина: Математический анализ

Направление 080500.62 Бизнес-информатика

Якутск – 2013 г.

УДК: 512.64(075.8)

ББК: 22.143я73

Г58

Разработчик - Гоголева И.В., к.п.н., доцент кафедры «Математика и бизнес-информатика» экономического факультета

Обсуждено кафедрой «Математика и бизнес-информатика» экономического факультета, протокол заседания кафедры № 13 от «12» ноября 2013 г.

Утверждено методической комиссией экономического факультета, протокол заседания методической комиссии факультета № 3 от «21» ноября 2013 г.

1. Содержание дисциплины

I раздел. Основы математического анализа

Понятие множества. Числовые множества. N – мерное пространство. Постоянные и переменные величины. Ограниченные, замкнутые, открытые множества в n – мерном пространстве. Выпуклые множества. Понятие числовой последовательности. Предел последовательности. Теоремы о пределах последовательности. Понятие функции переменной. Основные элементарные функции. Основные свойства функции. Понятие предела функции. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Основные теоремы о пределах функций. Понятие непрерывности функции. Точки разрыва. Свойства непрерывных функций. Экономическая интерпретация непрерывности. Экономические приложения основ математического анализа.

II раздел. Основы дифференциального исчисления функции одной переменной

Понятие производной функции. Правило дифференцирования. Применение производной в экономике. Понятие дифференцируемости функции. Дифференциал функции. Формула Тейлора. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Производные высшего порядка. Дифференциалы высшего порядка. Приложения дифференциального исчисления: правило Лопиталья, исследование и построение графика функции. Экономические приложения дифференциального исчисления функции одной переменной.

III раздел. Основы интегрального исчисления функции одной переменной

Неопределенный интеграл и его свойства. Простейшие приемы интегрирования. Таблица основных интегралов. Интегрирование рациональных алгебраических функций, некоторых иррациональных алгебраических функций, трансцендентных функций. Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Несобственный интеграл.

Абсолютная и условная сходимость. Экономические приложения к понятию интеграла. Экономические приложения интегрального исчисления функции одной переменной.

IV раздел. Функции многих переменных

Понятие функции многих переменных. Некоторые многомерные функции, используемые в экономике. Предел функции двух переменных, непрерывность. Частные производные 2-го, высших порядков и экономический смысл. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференциал. Производная по направлению, градиент. Дифференциалы высшего порядка. Экстремумы функций двух переменных. Необходимое и достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее функции в замкнутой области. Условный экстремум, метод множителей Лагранжа. Применение теории функции многих переменных к экономическим задачам.

V раздел. Простейшие дифференциальные уравнения.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: уравнение Бернулли и в полных дифференциалах. Дифференциальные уравнения 2-го и высшего порядка. Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка. Применение теории дифференциальных уравнений к экономическим задачам.

VI раздел. Ряды

Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости ряда. Ряды с положительными членами. Степенные ряды. Радиус сходимости. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Ряд Тейлора. Разложение в степенной ряд некоторых элементарных функций. Тригонометрический ряд. Ряд Фурье. Применение теории рядов к экономическим задачам.

2. Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Никольский С.М. Курс математического анализа, 2008.
2. Баврин, И.И. Математический анализ, 2006.
3. Карташов, А.П. Математический анализ, 2007.
4. Берман, Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа, 2008.
5. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу, 2010.
6. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник /под ред. В.И. Ермакова. – М.:ИНПРА-М, 2005.-656 с.
7. Сборник задач по высшей математики для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова.- М.: ИНФРА-М, 2005.- 575 с. - /Серия «Высшее образование »
8. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учеб. - 2-е изд., испр. - М.: Дело, 2001.-688 с.
9. Высшая математика для экономистов: Практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / под. Ред. Н.Ш. Кремера.- 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.- 479 с.
10. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов.- 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ- ДАНА, 2006.
11. Высшая математика для экономического бакалавриата: Учебник и практикум. / Под ред. Н.Ш. Кремера. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2012. – 909 с.
12. В.И.Малыхин. Математика в экономике. Учебное пособие.- М.: Инфра-М, 1999.
13. В.И. Малыхин. Математическое моделирование экономики. Учебное пособие. -М.: Инфра-М, 1998.

Дополнительная литература

1. Шипачев В.С. Высшая математика.: Учеб.для немат. спец. вузов/ Под ред. Акад. А.Н. Тихонова.- 2-е изд., стер. - М.: высш. Шк.,1990.- 479 с., ил.
2. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учеб. Пособие для вузов.- 2-изд., испр.- М.: Высш. Шк., 2001. – 304 с.: ил.
3. Гмурман В. Е.. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. Изд. 6-е, стер. – М.: Высш. шк.,1998. – 479 с.: ил.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учеб. пособие для вузов. Изд. 5-е, стер. - М.: Высш. шк.,1999.- 400 с.: ил.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: Учеб. пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш.шк., 1998. – 304 с.: ил.
6. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. - 2-е изд., перераб и доп. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. - 352 с
7. Красс, М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - М.: Дело, 2006.
8. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер. - М.: ЮНИТИ, 2004.

Нормативная литература

1. Справочник по математике для экономистов / под ред. В.И. Ермакова. – М.: Высшая школа, 2009.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М., любое издание.
3. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-методическое пособие / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Высшее образование, 2009.

3. Контрольные задания

Контрольная работа 1.

Раздел 1. Основы математического анализа

1.1. Найти область определения функции:

$$y = \sqrt{(10 - n)x - n} + \frac{nx}{\lg((5 - n)x^2 - 2n)}$$

$$D(x) = \{x/y = y(x)\}$$

$$D(x) \Rightarrow \begin{cases} (10 - n)x - n \geq 0 \\ \lg((5 - n)x^2 - 2n) \neq 0 \\ (5 - n)x^2 - 2n > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5 - n)x^2 - 2n \neq 10^0 \end{cases}$$

1.2. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида

$$y = \left(\frac{1}{n}\right)^x - n^x; \quad y = \lg \frac{x^2 - 4n}{8 - nx^4}$$

1.3. Найти период функции $y = \cos(nx + 3)$.

1.4. Найти указанные пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^3 + n}}{\sin \frac{\pi}{x}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\ln(1 + nx^2)};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow n} \frac{x - n}{\sqrt{x + n} - \sqrt{3n - x}}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^2 + 2x + n - 5}{(1 - 2n)x^2 + 3x - 1};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^3 + x^2 + 4x - n}{2nx + 3}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3n}{x^5 + nx^4 + n};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2nx}{(1 - \cos nx)}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(nx)}{1 - \cos x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{nx - 3}{2x + n}\right)^{x-n}; \quad 10) \lim_{x \rightarrow n} (nx - 7)^{\frac{n}{x+n}}.$$

1.5. Проверить на непрерывность функцию

$$y = \frac{nx + 1}{x^2 - n}$$

$$n = 4$$

1.6. Затраты на производство кисломолочной продукции y (у. д. е.) выражаются уравнением $y = 100 + nx$, где x – количество месяцев. Доход от реализации продукции выражается уравнением $y = 25 + (n + 10)x$. Начиная с какого месяца производство будет рентабельным?

1.7. Функция $f(x)$ задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения аргумента x . Требуется: 1) найти точки разрыва функции, если они существуют; 2) найти односторонние пределы и скачок функции в точках разрыва; 3) сделать чертеж.

$$y = \begin{cases} -nx, & \text{если } x < -\frac{n}{3} \\ n - x^2, & \text{если } -\frac{n}{3} \leq x < n \\ 17 - nx, & \text{если } x > n \end{cases}$$

1.8. Товарооборот сельскохозяйственного кооператива ежемесячно увеличивается на 1 %. Через сколько месяцев товарооборот, сохраняя темпы роста, увеличится в n раз по сравнению с первоначальным. Ответ округлить до целых.

1.9. Построить графики функции

$$1) y = x^2 - n|x| - n; \quad 2) y = \log_2(1 - nx);$$

$$3) y = \sin(nx - 1) + n; \quad 4) r = 2n(1 - \cos\varphi).$$

1.10. Размер популяции насекомых в момент t (в днях) задается функцией $P(t) = 10000n - 20013(1 - t)$. Вычислите начальную популяцию.

1.11. У годовалых лососей потребление кислорода с повышением скорости плавания возрастает экспоненциально*. Найдите зависимость

между $u(v)$ – величиной потребления кислорода в час годовалым лососем – и скоростью плавания v (м/с), если известно, что $u(0) = 10n$ мг/ч, $u(4) = 50n$ мг/ч. Найдите $u(1)$ и $u(3)$.

*Экспоненциальная функция имеет вид $y = Ane^{Bv}$, где A и B – параметры.

1.12. Содержание белка (%) в скошенной траве через t (ч) выражается зависимостью $B = pe^{nct}$. Найдите параметры p и c по данным опытам.

$t, (\text{ч})$	0	n
$B, \%$	15,4	$10n$

Составьте таблицу найденной зависимости, взяв точки t через один час от 0 до 24 ч и постройте график.

1.13. Функция $x(t) = 1000n + 50(1 - 3^{-nt})$ соответствует непрерывному росту популяции бактерий от начального размера $x(0) = 1000n$ до предельного размера. Чему равны численные значения популяции в моменты времени $t = 1, 2, 3, \dots, 10$. Найдите предельный размер популяции. Постройте график.

1.14. Зависимость между возрастом коров x (лет) и суточным удоем y (л) выражается производственной функцией $y = -n + 7,1x - 0,5x^2$. Как изменится среднесуточный удой коров, если возраст их увеличился с 3 до 5 лет.

1.15. Урожай сахарной свеклы (т/га) в зависимости от количества вносимых минеральных удобрений (ц/га) выражается производственной функцией $y = nx - \frac{n}{7}$ при $0,6 < x < 6$. На другом множестве значений x формула имеет другой вид. Подсчитайте приближенно, как изменится урожай сахарной свеклы, если количество вносимых удобрений увеличить с 4 до 6 ц/га.

Контрольная работа 2.

Раздел 2. Основы дифференциального исчисления

2.1. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами дифференцирования.

$$1) y = \frac{nx - 7}{\sqrt{x^2 - nx + 5n}}; \quad 2) y = (5^{\sin 5nx} - \cos^3 nx)^n;$$

$$3) y = \arctg \sqrt{n - x^2}; \quad 4) y = \ln^n \sqrt{\frac{1 - nx}{x^3 + 3n}};$$

$$5) y = (\arcsin 7x)^{x^3 + 3n}$$

2.2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$1) 3x^n - ny^{1-n} + \operatorname{tg} nx + 2ny - n = 0;$$

$$2) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} nt \\ y = \ln(1 + nt^2) \end{cases}$$

2.3. Найти приближенное значение указанных величин с помощью дифференциалов соответствующих функций:

$$1) \operatorname{ctg} \frac{n}{2}; \quad 2) \sqrt{5 + n}.$$

2.4. Исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и начертить их графики. Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме: 1) найти область существования функции; 2) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции и её односторонние пределы в точке разрыва; 3) выяснить, является ли данная функция четной, нечетной; 4) найти точки экстремума функции и определить интервалы ее возрастания и убывания; 5) найти точки перегиба графика функции и определить интервалы выпуклости и вогнутости графика; 6) найти асимптоты графика функции, если они имеются; 7) построить график

функции, используя результаты исследования, при необходимости можно дополнительно находить точки графика, давая аргументу X ряд значений и вычисляя соответствующие значения Y .

$$y = \frac{3 - px}{(x - p)^2}$$

2.5. Найти наибольшие и наименьшие значения функции $y = f(x)$ на заданном отрезке.

1) $y = nx^3 - x^2 + 2n$ на $[-n; n]$;

2) $\frac{n - x}{nx^2 + 7}$ на $[0; n]$

2.6. Требуется изготовить открытый сверху цилиндрический сосуд максимальной вместимости. Каковы должны быть размеры сосуда (радиус R и высота H , если на его изготовление имеется $S = 180(n + 7)$ дм² материала?

2.7. В прямоугольной системе координат через точку $M(n; 2n)$ проведена прямая, которая вместе с осями координат образует треугольник, расположенный в первом квадрате. Каковы должны быть отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, чтобы площадь треугольника была наименьшей?

2.8. Резервуар, открытый сверху, имеет форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Каковы должны быть размеры резервуара, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала, если он должен вмещать $150n$ л воды?

2.9. Требуется вырыть силосную яму объемом $V = 12n$ м³ с квадратным дном таких размеров, чтобы на облицовку ее дна и стен пошло наименьшее количество материала. Каковы должны быть размеры ямы?

Контрольная работа 3.

Раздел 3. Основы интегрального исчисления

3.1. Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

$$1) \int e^{\cos(nx)} \cdot \sin(nx) \cdot dx; \quad 2) \int x^n \cdot \sqrt[3]{1-x^{n+1}} \cdot dx;$$

$$3) \int x e^{nx} dx; \quad 4) \int \frac{dx}{nx^2 - x - n}$$

3.2. Вычислить определенный интеграл: а) по формуле Ньютона-Лейбница; б) приближенно по формуле трапеций, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Найти разность между полученными значениями интеграла. Все вычисления производить с округленными до четвертого десятичного знака числами.

$$\int_{-n}^n x \cdot \sqrt{x^2 + n} \cdot dx.$$

3.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой:

$$y = \frac{x^2}{n} - x + n \quad \text{и} \quad y = -\frac{x^2}{n} + nx + 1.$$

3.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой

$$x = n \cdot \cos^3 t, \quad y = 2n \cdot \sin^3 t.$$

3.5. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{n}{3}x^2$, прямой $x = \frac{n}{2}$ и осью Ox .

3.6. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox эллипса

$$x = n \cdot \cos t, y = 2n \cdot \sin t.$$

3.7. Найти длину дуги кривой

$$y = \ln(nx) \text{ от } x_1 = 1 \text{ до } x_2 = n.$$

3.8. Найти длину одной арки циклоиды

$$x = n(t - \sin t), \quad y = n(1 - \cos t).$$

3.9. Найти длину кардиоиды $r = 2n(1 - \cos \varphi)$.

3.10. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox параболы $y^2 = 2x + n$ от $x_1 = 1$ до $x_2 = n$.

3.11. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды

$$x = n(t - \sin t), \quad y = n(1 - \cos t).$$

3.12. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 2n(1 - \cos \varphi)$ и окружностью с радиусом $r = 2n$.

3.13. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной дугой синусоиды $y = \sin(nx)$ и отрезком оси Ox от $x_1 = \pi$.

3.14. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + n}; \quad 2) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^n}; \quad 3) \int_0^n x^2 e^{-x^2} dx; \quad 4) \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos(nx)}.$$

Контрольная работа 4

Раздел 4. Функции многих переменных

Примечание: n – номер двух последних цифр зачетной книжки или номер по списку.

4.1. Дана функция $z = f(x, y)$:

$$z = \arcsin \frac{n \cdot x - (10 - n) \cdot y}{x + ny}$$

Найти: 1) полный дифференциал dz ; 2) частные производные 2-го порядка

$$\frac{d^2z}{dx^2} \text{ и } \frac{d^2z}{dy^2}; 3) \text{смешанные частные производные } \frac{d^2z}{dxdy} \text{ и } \frac{d^2z}{dydx}.$$

4.2. Исследовать на экстремум функцию

$$z = (n - 10) \cdot x^2 + (10 - n) \cdot y^2 - n \cdot xy + x - y + n = 0.$$

4.3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$z = (n - 50) \cdot x^2 + (84 - n) \cdot y^2 - n = 0$$

в замкнутой области $D: 0 \leq x \leq n, 10 \leq y \leq 2n$ заданной системой неравенств. Сделать чертеж.

4.4. Найти экстремум функции $z = (n - 10) \cdot x^2 + (10 - n) \cdot y^2 - n \cdot xy + x - y + n = 0$ при $x + ny = 1$.

Контрольная работа 5

Раздел 5. Ряды

Примечание: p – номер двух последних цифр зачетной книжки или номер по списку.

5.1. Исследовать сходимость рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|10-p|}}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+p)!}{p^n}; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n^n};$$

5.2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n - p}{n(n + p)};$$

5.3. Определить интервал сходимости степенного ряда и исследовать на границах интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(px - 1)^n}{(n + 1) \cdot p^n}$$

5.3. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$y = \frac{1}{px}$$

по степеням $(x + p)$.

5.4. С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить с точностью до 10^{-3} следующий интеграл

$$\int_0^p e^{-x^2} \cdot dx.$$

5.5. Разложить в ряд Фурье функцию $y = (px - 1)^2$ с периодом $T = 2p$ на отрезке $[-p, p]$.

Контрольная работа 6.

Раздел 6. Дифференциальные уравнения

Примечание: p – номер двух последних цифр зачетной книжки или номер по списку.

6.1. Решить дифференциальные уравнения I-го порядка

$$\text{а) } xy y' = 1 - px^2, \quad y(1) = 1;$$

$$\text{б) } y' = \frac{x + py}{px - y};$$

$$\text{в) } y' - \frac{p}{x}y = px^3;$$

$$\text{г) } y' + \frac{py}{x} = y^2x;$$

$$\text{д) } (3x^2 + py)dx + (px - 3)dy = 0.$$